풀이

STEP II 2006, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2006, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q4

핵심 아이디어

치환(substitution) $x = \pi - t$를 하면 $\sin x$는 그대로이지만 인수 x는 $\pi - t$로 바뀐다. 따라서 적분이 우변에 다시 나타나고, 방정식을 풀듯이 그 적분을 구할 수 있다. 이렇게 하면 다루기 까다로운 인수 x가 완전히 사라진다. 그 뒤로는 문제에 나오는 모든 적분이 $\sin x$의 함수에 $\sin x$(또는 $\cos x$)를 곱한 꼴이 되므로, $u = \cos x$ 또는 $u = \sin x$로 치환하면 마무리된다. 진짜 핵심은 소문항 (ii)와 (iii)을 항등식(identity)이 적용되는 꼴로 바꾸는 방법을 알아차리는 데 있다.

풀이

항등식

$I = \int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, \mathrm{d}x$라 하자. $x = \pi - t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$이고, $x = 0$일 때 $t = \pi$, $x = \pi$일 때 $t = 0$이다. $\sin(\pi - t) = \sin t$이므로

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - t)\, f(\sin t)\, (-\mathrm{d}t) = \int_0^{\pi} (\pi - t)\, f(\sin t)\, \mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)\, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t\, f(\sin t)\, \mathrm{d}t = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\, \mathrm{d}x - I \end{aligned}$$

이다. 적분변수의 이름은 상관없기 때문이다. 따라서 $2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\, \mathrm{d}x$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$$\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\, \mathrm{d}x.$$

소문항 (i)

여기서는 $f(\sin x) = \dfrac{\sin x}{3+\sin^2 x}$이므로, 항등식에 의해

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi J, \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

이다. $3+\sin^2 x = 4-\cos^2 x$로 쓰고 $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$로 치환하면 u는 1에서 -1까지 움직이므로

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}.$$

이다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면 $\dfrac{1}{4-u^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2-u} + \dfrac{1}{2+u}\right)$이므로

$$J = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{2+u}{2-u}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}\ln 3.$$

이다. ($[-1,1]$에서 $2\pm u$는 모두 양수이므로 절댓값 기호는 필요 없다.) 따라서

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3.$$

이다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 항등식은 $[0,\pi]$에서만 성립한다. $[\pi,2\pi]$는 어떻게 다룰까?

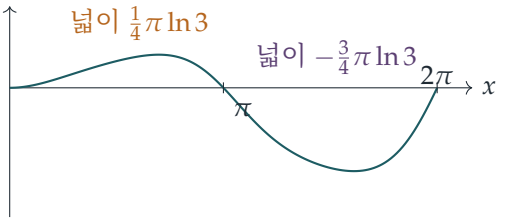
적분 구간을 π에서 나누고, 두 번째 부분은 $x = \pi + t$로 놓아 $[0,\pi]$로 옮긴다. 그러면 $\sin x = -\sin t$이고 $\sin^2 x = \sin^2 t$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\pi} \frac{(\pi+t)\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = -\pi J - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi\ln 3 - \tfrac{1}{4}\pi\ln 3 = -\tfrac{3}{4}\pi\ln 3,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $J = \frac{1}{2}\ln 3$과 소문항 (i)의 결과를 썼다. 소문항 (i)에서 구한 $[0,\pi]$에서의 적분을 더하면

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3 - \frac{3\pi}{4}\ln 3 = -\frac{\pi}{2}\ln 3.$$

이다. 아래 그림을 보면 답이 음수인 이유를 알 수 있다. 피적분함수(integrand)는 두 절반에서 모양이 같지만, $[\pi,2\pi]$에서는 더 큰 x 값이 곱해진다.



소문항 (iii)

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$이고 $[0,\pi]$에서 $\sin x \geq 0$이므로

$$|\sin 2x| = 2\sin x\,|\cos x| = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x},$$

이고, 이것은 $\sin x$만의 함수이다.

생각해 보기 여기서 $\cos x$가 아니라 $|\cos x|$가 나타나는 것이 왜 중요할까?

$[0,\pi]$에서 $\cos x$는 $\sin x$의 함수가 아니다. $\sin(\pi-x) = \sin x$인 반면 $\cos(\pi-x) = -\cos x$이기 때문이다. 하지만 $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$는 $\sin x$의 함수이므로, 절댓값(modulus) 덕분에 바로 항등식을 쓸 수 있다.

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

새 피적분함수는 $x \mapsto \pi - x$로 바꾸어도 변하지 않으므로, $[0,\pi]$에서의 적분은 $[0,\frac{1}{2}\pi]$에서의 적분의 두 배이다. 이 구간에서는 $\cos x \geq 0$이므로 절댓값을 없앨 수 있다.

$$\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\ln(3+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = 2\ln\tfrac{4}{3},$$

분자가 분모의 도함수이기 때문이다. 따라서

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\cdot 2\ln\tfrac{4}{3} = \pi\ln\frac{4}{3}.$$

이다.

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 (i)은 0.86285, (ii)는 −1.72570, (iii)은 0.90378이 나오며, 각각 $\frac{1}{4}\pi\ln 3$, $-\frac{1}{2}\pi\ln 3$, $\pi\ln\frac{4}{3}$과 일치한다.
- (ii)의 답은 정확히 (i)의 답의 −2배이다. π에서 구간을 나누어 보면 그 이유가 설명된다. 두 절반은 각각 $\frac{1}{4}\pi\ln 3$과 $-\frac{3}{4}\pi\ln 3$이다.
- 항등식을 빠르게 확인해 보자. $f \equiv 1$이면 양변이 모두 $\frac{1}{2}\pi^2$이다.

흔한 실수

- $[0,2\pi]$에서 비슷한 "항등식"을 쓰는 것. 그러면 $\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0$이 나온다. 증명에는 $\sin(2\pi - t) = \sin t$가 필요한데, 이것은 거짓이다.
- (iii)에서 $[0,\pi]$ 전체에 걸쳐 $|\sin 2x| = 2\sin x\cos x$로 쓰는 것. 그러면 안쪽 적분이 0이 된다.

STEP 너머

적분이 다시 나타나게 하여 그 적분을 구하는 기법과 $x \mapsto \pi - x$ 같은 대칭성을 이용하는 방법은 해석학(analysis)에서, 그리고 초등함수로 된 원시함수(antiderivative)가 없는 정적분(definite integral)을 계산할 때 쓰는 표준적인 도구이다. 이러한 방법은 푸리에 급수(Fourier series)로 이어지는데, 여기서는 한 주기에 걸친 x와 삼각함수의 곱의 적분이 기본 대상이다. 이런 방식의 논증을 더 알고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를, 적분의 엄밀한 이론은 Abbott, *Understanding Analysis*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.