풀이

STEP II 2006, 문제 3

순수수학 • 무리수와 근삿값

> **STEP II 2006, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q3

핵심 아이디어

수 $5+\sqrt{24}$에는 "켤레(conjugate)" $5-\sqrt{24}$가 있고, 두 수를 곱하면 1이 된다. 어떤 수와 그 켤레의 같은 거듭제곱을 더하면 근호(surd)가 모두 소거되므로 그 합은 정수(integer)이다. 켤레는 작은 수이므로 그 거듭제곱은 매우 작고, 따라서 큰 쪽의 거듭제곱은 어떤 정수보다 아주 조금 작아야 한다. 소문항 (ii)는 5를 N으로 바꾼 같은 논증이다.

풀이

소문항 (i)

$a=5+\sqrt{24}$, $b=5-\sqrt{24}$라 하자. 그러면

$$a+b=10, \qquad ab=25-24=1,$$

이므로 $b=1/a$이다. 따라서 구하려는 식은 a^4+b^4이다. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$를 두 번 사용하면

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 10^2-2=98, \\ a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2(ab)^2=98^2-2=9602. \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a^4+\dfrac{1}{a^4}=9602$이고, 이는 정수이다.

부등식(inequality)을 보이기 위해 $\dfrac{1}{a}=b=5-\sqrt{24}$임을 떠올리자.

- $b>0.1 \iff \sqrt{24}<4.9 \iff 24<24.01$이고, 이는 참이다. (양변이 모두 양수이므로 여기서 제곱하는 것은 가역적이다.)

- $b < \frac{2}{19} \iff \sqrt{24} > 5 - \frac{2}{19} = \frac{93}{19} \iff 24 \cdot 19^2 > 93^2 \iff 8664 > 8649$이고, 이는 참이다.
- $\frac{2}{19} < 0.11 \iff 2 < 2.09$이고, 이는 참이다.

따라서 $0.1 < \dfrac{1}{5+\sqrt{24}} < \dfrac{2}{19} < 0.11$이다.

생각해 보기 이 범위들로부터 어떻게 a^4의 값을 소수점 아래 넷째 자리까지 확정할 수 있을까?

첫 번째 결과로부터 $a^4 = 9602 - b^4$이다. 양수에 대한 부등식 $0.1 < b < 0.11$의 각 변을 네 제곱하면

$$0.0001 < b^4 < 0.11^4 = 0.00014641,$$

이고, 따라서

$$9601.99985359 < a^4 < 9601.9999.$$

이다. 이 구간에 속하는 모든 수는 9601.99985와 9601.9999 사이에 있으므로 반올림하면

$$\left(5+\sqrt{24}\right)^4 = 9601.9999 \quad \text{(소수점 아래 넷째 자리까지)}.$$

이다. (더 정밀한 범위 $b < \frac{2}{19}$를 쓰면 $b^4 < \frac{16}{130321} \approx 0.000123$을 얻는다. 여기서는 필요하지 않지만, $\frac{2}{19}$가 어디에서 왔는지를 보여 준다. 검산을 참고하라.)

소문항 (ii)

$A = N + \sqrt{N^2-1}$, $B = N - \sqrt{N^2-1}$이라 하자. $N \geq 2$이므로 둘 다 실수이다. 앞에서와 마찬가지로

$$A + B = 2N, \qquad AB = N^2 - (N^2 - 1) = 1.$$

이다.

1단계: $A^k + B^k$는 정수이다. 두 거듭제곱을 이항정리(binomial theorem)로 전개한다. $\sqrt{N^2-1}$의 짝수 제곱을 포함하는 항은 정수이고 두 전개식에 똑같이 나타난다. 홀수 제곱을 포함하는 항은 서로 반대 부호로 나타나 소거된다. 따라서 모든 양의 정수 k에 대하여 $S_k = A^k + B^k$는 정수이다. (다른 방법으로, A와 B는 $x^2 - 2Nx + 1 = 0$의 두 근이므로 $S_0 = 2$, $S_1 = 2N$일 때 $S_k = 2NS_{k-1} - S_{k-2}$가 성립하고, 수학적 귀납법(induction)에 의해 정수임을 얻는다.)

2단계: B는 작다. $0 < B < \dfrac{1}{2N - \frac{1}{2}}$임을 보이자. $B = 1/A$이고 $A > 0$이므로 이는

$$A > 2N - \tfrac{1}{2} \iff \sqrt{N^2-1} > N - \tfrac{1}{2}.$$

와 동치이다. ($N \geq 2$이므로) 양변이 모두 양수이므로 제곱할 수 있다.

$$N^2 - 1 > N^2 - N + \tfrac{1}{4} \iff N > \tfrac{5}{4},$$

$N \geq 2$이므로 이는 성립한다. 따라서 $0 < B < \left(2N - \frac{1}{2}\right)^{-1}$이고, (모든 값이 양수이므로) k제곱하면

$$0 < B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k}.$$

이다.

3단계: **결론**. $A^k = S_k - B^k$이므로 A^k는 정수 S_k로부터 정확히 B^k만큼 떨어져 있다. A^k에 가장 가까운 정수는 S_k보다 멀지 않다. (실제로 $B^k < \frac{1}{2}$이므로 그 정수는 S_k이다.) 따라서

$$\left|A^k - (\text{가장 가까운 정수})\right| \leq B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k},$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다.

검산

- 수치로 계산하면 $(5 + \sqrt{24})^4 \approx 9601.999896$이고, 이는 앞에서 구한 구간 안에 있으며 반올림하면 9601.9999이다.
- $N = 5$일 때 소문항 (ii)는 $(2N - \frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{9.5} = \frac{2}{19}$를 준다. 이는 소문항 (i)의 범위와 정확히 같다. 즉 소문항 (i)는 사실 $N = 5, k = 4$인 경우이다.
- $N = 2, k = 1$일 때: $2 + \sqrt{3} \approx 3.732$는 4로부터 약 0.268만큼 떨어져 있고 $(3.5)^{-1} \approx 0.286$이므로 범위가 성립한다. 컴퓨터로 N은 1000까지, k는 24까지 확인하였다.

흔한 실수

- 양변이 양수임을 밝히지 않고 $\sqrt{N^2 - 1} > N - \frac{1}{2}$를 제곱하는 것.
- $a^4 \approx 9602.0000$이라고 쓰는 것: 이 값은 9602보다 0.0001에서 0.00015 사이만큼 **작으며**, 이 차이는 소수점 아래 넷째 자리를 바꾸기에 충분하다.
- $N = 1$인 경우가 이유가 있어서 제외되었음을 잊는 것: 이때는 $B = 1$이 되어 논증이 무너진다.

STEP 너머

$5 + \sqrt{24}$와 같은 수는 환(ring) $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$의 단원(unit)이다. 즉 같은 꼴의 역원 $5 - \sqrt{24}$를 가지며, 그 거듭제곱들은 펠 방정식(Pell equation) $x^2 - 24y^2 = 1$의 모든 해를 준다. 이러한

단원의 거듭제곱은 점점 더 정수에 가까워지며, 이것은 거듭제곱이 이와 같이 정수에 가까워지는 성질을 갖는 피조 수(Pisot number) 이론으로 가는 한 가지 길이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 펠 방정식과 연분수(continued fraction)를 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.