풀이

STEP II 2006, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP II 2006, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q10

핵심 아이디어

각 충돌은 두 방정식으로 푸는 문제이다. 하나는 직선 방향의 운동량 보존(conservation of momentum)이고, 다른 하나는 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution), 즉 분리 속력(speed of separation)이 접근 속력(speed of approach)의 e배라는 법칙이다. 먼저 A–B 충돌을 풀고, 그 결과로 얻은 B의 새 속도를 B–C 충돌에 넣는다. A는 B의 뒤에 있으므로, B가 C와 충돌한 뒤 앞쪽 방향으로 A가 B보다 더 빠르게 움직이게 되는 경우에만 정확히 A–B의 두 번째 충돌이 일어난다. 그러면 (ii)는 등속도로 움직이는 물체들의 추격 문제(pursuit problem)가 된다.

풀이

A, B, C를 매끄러운(smooth) 면 위의 한 직선을 따라 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. 따라서 충돌하는 동안을 제외하면 수평 방향의 힘은 작용하지 않는다. A를 쏘아 보낸 방향을 양의 방향으로 잡는다. 아래의 모든 속도는 부호를 가진 값이다.

소문항 (i)

A와 B의 충돌. 충돌 직후 A와 B의 속도를 각각 v_A, v_B라 하자. 운동량 보존과 반발 법칙($e = \frac{1}{2}$)에서

$$mv_A + km\,v_B = mu, \qquad v_B - v_A = \tfrac{1}{2}u.$$

를 얻는다. $v_A = v_B - \frac{1}{2}u$를 첫 번째 식에 대입하면 $(1+k)v_B = \frac{3}{2}u$이므로

$$v_B = \frac{3u}{2(1+k)}, \qquad v_A = v_B - \frac{u}{2} = \frac{(2-k)\,u}{2(1+k)}.$$

이다. $v_B > 0$이므로 B는 실제로 C를 향해 나아가고, $v_A < v_B$이므로 B가 C에 닿기 전에 A가 B를 따라잡을 수는 없다.

B와 C의 충돌. 충돌 직후 B와 C의 속도를 각각 w_B, w_C라 하자. $e = \frac{1}{4}$이므로

$$km\,w_B + 3m\,w_C = km\,v_B, \qquad w_C - w_B = \tfrac{1}{4}v_B.$$

이다. $w_C = w_B + \frac{1}{4}v_B$를 대입하면 $(k+3)w_B = (k - \frac{3}{4})v_B$이므로

$$w_B = \frac{(4k-3)\,v_B}{4(k+3)} = \frac{3(4k-3)\,u}{8(1+k)(k+3)}.$$

이다. 또한 $w_C > w_B$이므로 B와 C는 멀어지며 다시는 만나지 않는다. 이 충돌 이후에는 A와 B가 (만약 만난다면) 만날 때까지 둘에게 아무것도 작용하지 않는다.

? **생각해 보기** A와 B가 다시 충돌할 조건은 정확히 무엇인가?

B가 C와 충돌한 뒤에는 A와 B 모두 등속도로 움직이고, A는 B의 뒤쪽(즉 B의 음의 방향 쪽)에 있다. 둘 사이의 간격은 $v_A > w_B$일 때 정확히 줄어들며, 이때 간격은 유한한 시간 안에 0이 된다. $v_A \le w_B$이면 간격은 결코 줄어들지 않는다. 이 부등식 하나가 모든 부호의 경우를 포함한다. 예를 들어 A가 뒤로 움직이더라도 B가 그보다 더 빠르게 뒤로 움직이면 B가 여전히 A를 따라잡는데, 이 경우도 $v_A > w_B$이다.

따라서 필요한 조건은

$$\frac{(2-k)u}{2(1+k)} > \frac{3(4k-3)u}{8(1+k)(k+3)}.$$

이다. $k > 0$이므로 양수인 $8(1+k)(k+3)/u$를 곱하면 다음과 동치인 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} 4(2-k)(k+3) &> 3(4k-3) \\ 24 - 4k - 4k^2 &> 12k - 9 \\ 4k^2 + 16k - 33 &< 0 \\ (2k-3)(2k+11) &< 0. \end{aligned}$$

$2k + 11 > 0$이므로 이 부등식은 $2k - 3 < 0$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. k는 질량비(mass ratio)이므로 $k > 0$이다. 따라서 A와 B가 두 번째로 충돌하는 것은 정확히 다음 경우이다.

$$0 < k < \tfrac{3}{2}.$$

$k = \frac{3}{2}$이면 $v_A = w_B = \frac{u}{10}$이다. 이때 두 입자는 같은 속력으로 나란히 나아갈 뿐 실제로 다시 만나지는 않으므로, 끝점은 제외된다.

소문항 (ii)

$k = 1$이면 위의 공식에서

$$v_A = \frac{u}{4}, \qquad v_B = \frac{3u}{4}, \qquad w_B = \frac{3u}{64}, \qquad w_C = \frac{15u}{64}.$$

를 얻는다. A와 B가 처음 충돌한 지점(즉 B의 처음 위치)을 원점으로 잡고, 그 충돌 순간부터 시간 t를 잰다.

B–C 충돌까지. B는 C까지의 거리 d를 속력 $\frac{3}{4}u$로 이동하므로, 걸리는 시간은

$$t_1 = \frac{d}{3u/4} = \frac{4d}{3u}.$$

이다. 이 시간 동안 A는 $\frac{u}{4} \cdot \frac{4d}{3u} = \frac{d}{3}$만큼 이동한다. 따라서 A는 $\frac{d}{3}$에, B는 d에 있고, 간격은 $\frac{2d}{3}$이다.

추격. 이제 A는 $\frac{u}{4} = \frac{16u}{64}$로, B는 $\frac{3u}{64}$로 움직이므로 A는 상대 속력 $\frac{13u}{64}$로 간격을 좁힌다. 여기에 걸리는 시간은

$$t_2 = \frac{2d/3}{13u/64} = \frac{128d}{39u}.$$

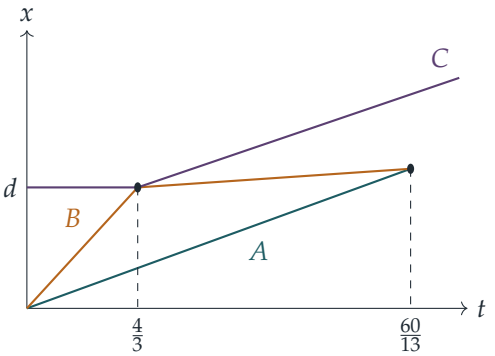
이다.

합계. 두 번의 A–B 충돌 사이의 시간은

$$t_1 + t_2 = \frac{4d}{3u} + \frac{128d}{39u} = \frac{52d + 128d}{39u} = \frac{180d}{39u} = \frac{60d}{13u},$$

이고, 이는 요구한 결과와 같다.

아래의 거리-시간 그래프(distance–time graph)는 $u = d = 1$일 때의 운동을 나타낸다. A와 B의 직선은 $t = \frac{60}{13}$에서 다시 만난다.



검산

- 운동량: $k = 1$일 때 첫 번째 충돌 후 $m \cdot \frac{u}{4} + m \cdot \frac{3u}{4} = mu$이고, 두 번째 충돌 후 $m \cdot \frac{3u}{64} + 3m \cdot \frac{15u}{64} = \frac{48}{64}mu = m \cdot \frac{3u}{4}$이다. 둘 다 맞아떨어진다.
- 경계 $k = \frac{3}{2}$: v_A와 w_B가 모두 $\frac{u}{10}$로 나오므로 임계값이 확인된다.
- 타당성 점검: k가 크면 A는 뒤로 튕겨 나가고($v_A < 0$) B는 앞으로 계속 나아가므로, 두 번째 충돌이 없는 것이 분명하다. 이는 구한 범위와 일치한다.

- 무작위로 고른 유리수 k 10^5개에 대해 $v_A > w_B$가 정확히 $k < \frac{3}{2}$일 때 성립함을 수치적으로 확인했고, $u = d = 1$로 시간 간격을 나누어 진행한 시뮬레이션에서 두 번째 충돌이 $t \approx 4.6154$에서 일어나 $\frac{60}{13} \approx 4.6154$와 일치했다.

흔한 실수

- 반발 법칙에 부호 있는 속도 대신 속력을 쓰는 것. 부호 있는 속도를 쓰면 분리 속력은 "앞의 속도 빼기 뒤의 속도"이고, v_A의 부호는 저절로 처리된다.
- 조건의 일부로 $v_A > 0$을 요구하는 것. 원리적으로 A는 뒤로 움직이면서도 B에게 따라잡힐 수 있다($w_B < v_A$인 경우). 올바른 조건은 $v_A > w_B$ 하나뿐이다.
- (ii)에서 추격 시간을 B의 속도가 바뀌는 순간이 아니라 첫 번째 충돌부터 재어서, A가 이미 이동해 둔 $\frac{d}{3}$만큼의 앞선 거리를 놓치는 것.

STEP 너머

운동량 보존과 반발 법칙을 함께 쓰면 모든 충돌은 충돌 전 속도를 충돌 후 속도로 보내는 선형사상(linear map)이 된다. 그러면 뉴턴의 요람(Newton's cradle)이나 두 블록과 벽 사이의 충돌 횟수를 세는 유명한 문제처럼 충돌이 연쇄적으로 일어나는 경우를 이 사상들의 합성(composition)으로 연구할 수 있다. 대학 1학년 역학에서는 이것이 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)로 이어지는데, 이 좌표계에서 반발 법칙은 상대 속도를 단순히 일정한 배율로 줄이는 것이 된다. 나아가 2차원과 3차원에서의 충돌로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 질량중심 좌표계를 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.