풀이

STEP II 2006, 문제 1

순수수학 • 주기적인 점화식

> **STEP II 2006, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q1

핵심 아이디어

각 항이 다음 항을 결정하므로, $u_{p+1} = u_1 = 2$가 되는 순간 수열은 주기(period) p로 반복된다. 따라서 (i)의 모든 소문항은 몇 개의 항을 k의 함수로 계산하고 다항식 방정식 하나를 푸는 것으로 귀결된다. 주기 4에 대한 방정식은 주기 1과 2에 대한 답을 인수로 포함해야 하며(주기가 1 또는 2인 수열도 $u_5 = u_1$을 만족한다), 이를 미리 알고 있으면 인수분해(factorisation)가 쉬워진다. (ii)는 한 줄짜리 수학적 귀납법(induction)과, 이어지는 흔한 "점화식에서 $n \to \infty$로 보내는" 논증으로 이루어진다.

풀이

소문항 (i)

$f(u) = k - \dfrac{36}{u}$로 두면 $u_{n+1} = f(u_n)$이다. $u_{p+1} = u_1$이면 f를 반복해서 적용하여 $u_{p+2} = u_2$, $u_{p+3} = u_3$, 등을 얻으므로 모든 n에 대하여 $u_{n+p} = u_n$이다. 역으로, 주기가 p이려면 당연히 $u_{p+1} = u_1 = 2$이어야 한다. 따라서 수열의 주기가 **정확히** p인 것은 $u_{p+1} = 2$이고(모든 항이 정의되어 있다는 조건, 즉 어떤 항도 0이 아니라는 조건 아래에서) 더 작은 주기가 성립하지 않을 때이다.

(a) 수열이 상수열인 것은 $u_2 = 2$, 즉 $k - 18 = 2$일 때이고 그때뿐이다. 따라서 $k = 20$이다.

(b) $u_2 = k - 18$이고

$$u_3 = k - \frac{36}{k-18} \qquad (k \neq 18).$$

$u_3 = 2$로 두면 $(k-2)(k-18) = 36$이므로 $k^2 - 20k = 0$이고, 따라서 $k = 0$ 또는 $k = 20$이다. $k = 20$은 상수열을 주는데, 이 수열의 주기는 2가 아니라 1이다. $k = 0$일 때 수열은

2, −18, 2, −18, …이고, 이는 실제로 주기 2를 갖는다. 따라서 $k = 0$이다.

(c) 두 항이 더 필요하다. $k \neq 18$이면

$$u_3 = \frac{k(k-18)-36}{k-18} = \frac{k^2-18k-36}{k-18},$$

이고, $k^2 - 18k - 36 \neq 0$이라는 조건 아래에서

$$u_4 = k - \frac{36(k-18)}{k^2-18k-36} = \frac{k^3-18k^2-72k+648}{k^2-18k-36}.$$

조건 $u_5 = 2$는 $k - 36/u_4 = 2$, 즉 $u_4 = \dfrac{36}{k-2}$라는 뜻이다(여기서 $k \neq 2$이어야 한다. $k = 2$이면 $36/u_4 = 0$이 되는데, 이는 불가능하다). 양변에 분모를 곱하면

$$(k-2)(k^3-18k^2-72k+648) = 36(k^2-18k-36).$$

전개하여 모든 항을 좌변으로 모으면

$$k^4-20k^3-36k^2+792k-1296 = 36k^2-648k-1296,$$
$$k^4-20k^3-72k^2+1440k = 0.$$

? 생각해 보기 이런 사차식을 많은 시행착오 없이 어떻게 인수분해할 수 있을까?

시작하기 전부터 두 근을 알고 있다. 주기가 1 또는 2인 수열은 모두 $u_5 = u_1$도 만족하므로, $k = 20$과 $k = 0$은 근이어야 한다. k와 $k - 20$을 차례로 묶어 내면

$$k^4-20k^3-72k^2+1440k = k(k-20)(k^2-72).$$

따라서 $k \in \{0, 20, 6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}\}$이다. 0과 20은 각각 주기 2와 1을 주므로, 새로운 값은 $k = \pm 6\sqrt{2}$이다.

마지막으로 $k^2 = 72$를 이용하여 $k = \pm 6\sqrt{2}$일 때 모든 항이 정의되는지 확인한다.

- $u_2 = k - 18 \neq 0$이다.
- u_3의 분자는 $k^2 - 18k - 36 = 36 - 18k$이고, $k \neq 2$이므로 0이 아니다.
- u_4의 분자는 $k(k^2 - 72) - 18k^2 + 648 = -1296 + 648 = -648 \neq 0$이다.
- 구성 방법에 의해 $u_5 = 2$이고, 계산 과정에서 요구한 대로 $k \neq 2, k \neq 18$이다.

$k \neq 0, 20$이므로 주기는 1도 2도 아니며, $u_5 = u_1$을 만족하면서 최소 주기가 1도 2도 아닌 수열은 최소 주기가 정확히 4이다(최소 주기는 4의 약수여야 하기 때문이다). 따라서 수열이 주기 4를 갖는 것은 $k = \pm 6\sqrt{2}$일 때이다.

소문항 (ii)

$k = 37$로 둔다. 귀납법으로 $u_n \geq 2$를 증명한다. $u_1 = 2$이므로 $n = 1$일 때 성립한다. $u_n \geq 2$이면 $u_n > 0$이므로 $0 < \dfrac{36}{u_n} \leq 18$이고, 따라서

$$u_{n+1} = 37 - \frac{36}{u_n} \geq 37 - 18 = 19 \geq 2.$$

그러므로 모든 n에 대하여 $u_n \geq 2$이고, 이것이 보여야 할 내용이었다. (사실 $n \geq 2$인 모든 n에 대하여 $u_n \geq 19$이다.)

> **생각해 보기** 극한에 대한 방정식은 두 근을 갖는다. 어느 것이 맞는 근이며, 왜 점화식에서 $n \to \infty$로 보낼 수 있는가?

$u_n \to \ell$이고 모든 $u_n \geq 2$이므로 $\ell \geq 2$이다. 특히 $\ell \neq 0$이므로 $36/u_n \to 36/\ell$이다. $u_{n+1} = 37 - 36/u_n$의 양변에서 $n \to \infty$로 보내면(좌변도 ℓ로 수렴한다)

$$\ell = 37 - \frac{36}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 - 37\ell + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\ell - 1)(\ell - 36) = 0.$$

근 $\ell = 1$은 $\ell \geq 2$에 의해 배제되므로

$$\ell = 36.$$

검산

- $k = 6\sqrt{2} \approx 8.485$일 때 항은 2, -9.515, 12.269, 5.551, 2, …이고, $k = -6\sqrt{2}$일 때는 2, -26.485, -7.126, -3.433, 2, …이다. 둘 다 네 단계 뒤에 반복된다.
- 인수 $k^2 - 72$에는 깔끔한 의미가 있다. 사상 $u \mapsto (ku - 36)/u$는 대각합(trace)이 k이고 행렬식(determinant)이 36인 행렬 $\begin{pmatrix} k & -36 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대응한다. 이 행렬의 고윳값(eigenvalue)은 $k = 12\cos\theta$일 때 $6e^{\pm i\theta}$이고, 네제곱이 단위행렬의 상수배가 되는 것은 $\theta = \pi/4$ 또는 $3\pi/4$일 때이다. 이로부터 $k = \pm 6\sqrt{2}$를 얻고, $\theta = \pi/2$로부터 주기 2에 해당하는 $k = 0$을 얻는다.
- $k = 37$일 때 $u_2 = 19$, $u_3 \approx 35.105$, $u_4 \approx 35.975$, $u_5 \approx 35.9993$이고, 항들이 1이 아니라 36에 가까워지고 있음이 분명하다.

흔한 실수

- (b)의 답으로 $k = 0, 20$을, (c)의 답으로 네 근을 모두 제시하는 것. 문제는 주기 2와 주기 4를 묻고 있으며, 그런 의미에서 상수열은 주기 2를 갖지 않는다.

- $\ell = 36$뿐 아니라 $\ell = 1$도 답으로 택하는 것. (ii)의 앞부분에서 얻은 부등식 $u_n \geq 2$는 바로 이것을 배제하기 위해 있다.
- $36/u_n \to 36/\ell$에 필요한 $\ell \neq 0$을 언급하지 않고 $n \to \infty$로 보내는 것.

STEP 너머

사상 $u \mapsto (ku - 36)/u$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이고, 이런 사상들의 합성은 2×2 행렬의 곱에 대응한다. 그래서 주기성은 고윳값의 비가 단위근(root of unity)이 되는 문제로 귀결된다. $k = 37$일 때 두 고정점(fixed point) 1과 36은 서로 다르게 행동한다. 36은 가까운 항들을 끌어당기고 1은 밀어내는데, 이는 $|f'(\ell)| = 36/\ell^2$에서 알 수 있다. 이것이 고정점 반복법과 수열의 수렴에 관한 이론의 출발점이며, 이 이론은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 엄밀하게 다룬다. Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 뫼비우스 변환과 그 분류에 관한 아름다운 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.