풀이

STEP I 2006, 문제 9

역학 • 연결된 입자

> **STEP I 2006, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q9

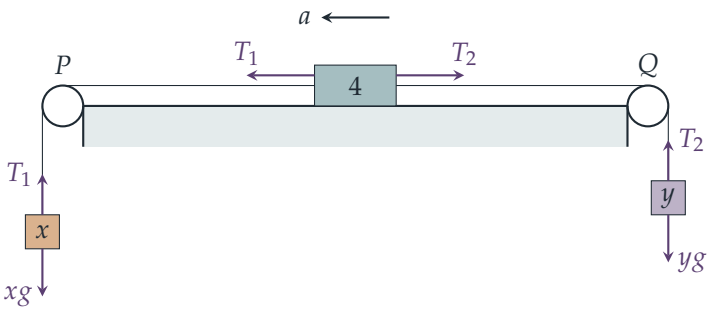
핵심 아이디어

운동은 두 단계로 나뉘며, 각 단계에서 가속도(acceleration)는 일정하다. 두 줄이 모두 연결되어 있는 동안에는 세 물체로 이루어진 계 전체가 하나처럼 움직이며, 두 매달린 물체의 무게 차이가 이 운동을 일으킨다. 줄이 끊어지고 나면 더 가벼운 입자만이 블록을 당기는데, 이제는 운동 방향과 반대로 당기므로 블록은 일정하게 감속한다. 줄이 끊어지는 순간의 속력이 두 단계를 잇는 고리이며, 구속 조건(constraint) $x + y = 6$을 이용하면 모든 것을 y로 나타낼 수 있다.

풀이

모형

블록과 두 매달린 물체를 질점(particle)으로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로, 탁자와 도르래를 매끄러운 것으로 본다. $x > y$이므로 블록은 P 쪽으로 움직이고, 질량 x인 입자는 내려가며 질량 y인 입자는 올라간다. P와 Q에 걸친 줄의 장력(tension)을 각각 T_1, T_2라 하자.



1단계: 두 줄이 모두 연결된 경우

공통 가속도를 a_1이라 하자(블록은 P 쪽으로, 입자 x는 아래로, 입자 y는 위로). 각 물체에 뉴턴(Newton) 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$\begin{aligned} xg - T_1 &= xa_1, \\ T_1 - T_2 &= 4a_1, \\ T_2 - yg &= ya_1. \end{aligned}$$

이다. 세 식을 더하면 장력이 소거된다.

$$(x-y)g = (x+y+4)a_1 = 10a_1, \qquad \text{이므로} \qquad a_1 = \frac{(x-y)g}{10} = \frac{(6-2y)g}{10},$$

여기서 $x = 6 - y$를 이용했다. $y < x$이면 $y < 3$이므로 이 값은 양수이다.

정지 상태에서 등가속도로 출발하므로, 블록은 시간 t_1 동안 거리 d를 이동하여 속력 V에 도달하며

$$d = \tfrac{1}{2}a_1 t_1^2, \qquad V^2 = 2a_1 d.$$

이다. 따라서

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{20d}{(6-2y)g}} = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\frac{10}{\sqrt{6-2y}}, \qquad V = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}}.$$

2단계: 줄이 끊어진 후

이제 $T_1 = 0$이다. 블록은 여전히 속력 V로 P 쪽으로 움직이고 있고, 질량 y인 입자도 여전히 속력 V로 올라가고 있다. 블록에는 Q에 걸친 줄만 작용하며, 이 줄은 블록을 Q 쪽으로 되당긴다. 감속도(deceleration)를 a_2라 하면

$$\begin{aligned} T_2 &= 4a_2 \quad \text{(블록)}, \\ yg - T_2 &= ya_2 \quad \text{(입자 } y\text{, 올라가면서 감속)}, \end{aligned}$$

이므로

$$a_2 = \frac{yg}{4+y}.$$

> **생각해 보기** 줄이 끊어진 뒤에도 Q에 걸친 줄이 팽팽하게 유지된다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

만약 줄이 느슨해진다면 입자는 g로 감속하고 블록은 속력을 그대로 유지할 것이다. 줄이 팽팽하다고 하면 장력은 $T_2 = 4a_2 = 4yg/(4+y) > 0$이 되어 모순이 없고, 공통 감속도 a_2는 g보다 작다. 따라서 줄은 실제로 팽팽하게 유지되며, 블록과 입자는 멈출 때까지 함께 움직인다.

블록은 추가로 다음 시간이 지난 뒤 정지한다.

$$t_2 = \frac{V}{a_2} = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}} \cdot \frac{4+y}{yg}$$
$$= \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\sqrt{6-2y}\left(1+\frac{4}{y}\right),$$

여기서 $\sqrt{(6-2y)gd/5}\,/\,g = \sqrt{d/(5g)}\sqrt{6-2y}$와 $(4+y)/y = 1+4/y$로 정리했다.

전체 시간

블록은 2단계가 끝날 때 처음으로 다시 정지하므로, 전체 시간은

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{d}{5g}}\left[\frac{10}{\sqrt{6-2y}} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\sqrt{6-2y}\right] = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\mathrm{f}(y),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

f의 정상값

물리적으로 가능한 범위는 $0 < y < 3$이다. $u = 6-2y$로 놓으면 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$이고

$$\mathrm{f}(y) = 10u^{-1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)u^{1/2}.$$

이다. 두 번째 항에 곱의 미분법(product rule)을 적용하여 미분하면

$$\mathrm{f}'(y) = 10\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-3/2}(-2) - \frac{4}{y^2}u^{1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\tfrac{1}{2}u^{-1/2}(-2)$$
$$= \frac{10}{u^{3/2}} - \frac{4u^{1/2}}{y^2} - \frac{y+4}{y\,u^{1/2}}.$$

$0 < y < 3$에서 양수인 $y^2u^{3/2}$를 곱하면, 조건 $\mathrm{f}'(y) = 0$은

$$10y^2 - 4u^2 - (y^2+4y)u = 0.$$

이 된다. $u = 6-2y$를 대입하면

$$10y^2 - 4(36-24y+4y^2) - (6y^2 - 2y^3 + 24y - 8y^2) = 0$$
$$2y^3 - 4y^2 + 72y - 144 = 0$$
$$2(y-2)(y^2+36) = 0.$$

$y^2 + 36 > 0$이므로 유일한 해는

$$y = 2,$$

이며, 이 값은 $0 < y < 3$에 속한다(이때 $x = 4$이다).

$y \to 0^+$일 때와 $y \to 3^-$일 때 모두 $\mathrm{f}(y) \to \infty$이므로, 이 하나뿐인 정류점(stationary point)이 최솟값을 준다. $\mathrm{f}(2) = 10/\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$이므로, 정지할 때까지 걸리는 가장 짧은 시간은 $8\sqrt{2d/(5g)}$이다.

검산

- 임의의 $y \in (0,3)$와 d에 대하여 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산(시간 간격 $2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$)해 보면 $\sqrt{d/(5g)}\,\mathrm{f}(y)$와 유효숫자 다섯 자리까지 일치한다. 예를 들어 $g = 9.8$일 때 $y = 1.671, d = 0.581$이면 두 방법 모두 $1.27096\,\mathrm{s}$를 준다.
- f의 수치 도함수는 $(0,3)$에서 정확히 한 번, $y = 2$에서 부호가 바뀌며, $\mathrm{f}(2) = 11.3137\ldots = 8\sqrt{2}$이다.
- 극한의 경우도 타당하다. $y \to 3$이면 두 질량이 거의 균형을 이루어 $a_1 \to 0$이 되고 1단계가 끝없이 길어진다. $y \to 0$이면 줄이 끊어진 뒤 블록을 감속시키는 것이 없으므로 2단계가 끝없이 길어진다.

흔한 실수

- 2단계에서 질량을 $4 + x + y$로 쓰는 것: 줄이 끊어지고 나면 질량 x인 입자는 더 이상 계의 일부가 아니다.
- 줄이 끊어진 뒤에도 질량 y인 입자가 여전히 속력 V로 위쪽으로 움직이고 있다는 사실을 잊고, 2단계가 정지 상태에서 시작한다고 보는 것.
- $\sqrt{6 - 2y}$를 미분할 때 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

운동을 속도의 연속성으로 이어지는 여러 단계로 나누는 것은 구간별로 정의된 동역학(piecewise-defined dynamics)의 기본 아이디어이며, 이는 충격력(impulsive force)이나 힘을 켜고 끄는 제어 문제(control problem)에서 다시 등장한다. 어떤 y를 택해야 시간이 최소가 되는지 묻는 것은 역학에서의 최적화(optimisation)를 처음 맛보는 것이며, 이는 변분법(calculus of variations)으로 발전한다(최속강하곡선(brachistochrone)이 고전적인 예이다). Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 연결된 물체와 구속력을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.