풀이

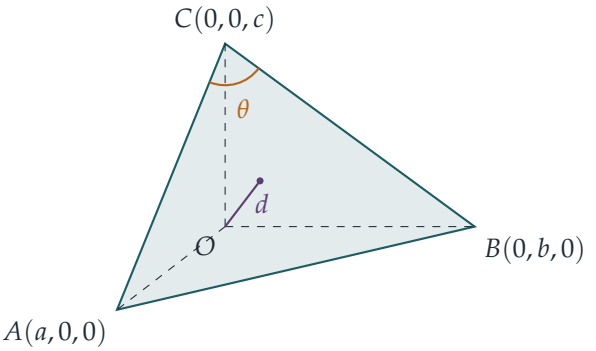
STEP I 2006, 문제 8

순수수학 • 3차원 벡터

> **STEP I 2006, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q8

핵심 아이디어

사면체(tetrahedron) $OABC$는 꼭짓점 O에서 서로 수직인 세 모서리를 가지므로, OAB를 밑면(base)으로 잡으면 부피(volume)를 쉽게 구할 수 있다. 같은 입체를 ABC를 밑면으로 하여 볼 수도 있는데, 이때의 높이가 바로 우리가 구하려는 거리 d이다. 따라서 ABC의 넓이만 알면, 부피를 두 가지 방법으로 계산하여 d에 관한 방정식을 얻을 수 있다. 그 넓이는 C에서의 각으로부터 구하며, 이 각은 스칼라곱(scalar product)으로 얻는다.



풀이

소문항 (i)

평면 $z = 0$ 위에 있는 삼각형 OAB를 밑면으로 잡는다. OA와 OB는 각각 x축과 y축 위에 있으므로 각 AOB는 직각이고, 따라서

$$\text{넓이} OAB = \tfrac{1}{2}ab.$$

높이는 C에서 평면 $z=0$까지의 거리이며, OC가 z축 위에 있어 그 평면에 수직이므로 높이는 c이다. 그러므로

$$V = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2}ab \times c = \frac{abc}{6}.$$

소문항 (ii)

각 ACB는 벡터(vector) $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$가 이루는 각이다.

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}.$$

두 벡터의 스칼라곱은 $0+0+c^2 = c^2$이고, 길이는 각각 $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$이다. 따라서

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

넓이를 구하려면 $\sin\theta$가 필요하다. $0<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$이고, 따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} &= \sqrt{\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},\end{aligned}$$

이다. $(a^2+c^2)(b^2+c^2)$를 전개하면 c^4 항이 소거되기 때문이다.

? **생각해 보기** 지금 가진 정보에 맞는 삼각형 넓이 공식은 무엇인가?

두 변 CA, CB와 그 사잇각 θ를 알고 있으므로 $\frac{1}{2}\,CA\cdot CB\sin\theta$를 쓴다. 번거로운 제곱근이 소거된다.

$$\text{넓이}ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\cdot\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

반갑게도 답은 a, b, c에 대하여 대칭인데, 이는 당연한 일이다. 삼각형 ABC 자체는 어느 꼭짓점을 C라고 불렀는지와 무관하기 때문이다.

거리 d

이제 같은 사면체에서 ABC를 밑면으로 본다. 이때 높이는 마주 보는 꼭짓점 O에서 ABC를 포함하는 평면까지의 수직 거리, 곧 d이다. 부피는 어느 면을 밑면으로 잡든 같으므로, 소문항 (i)과 소문항 (ii)로부터

$$\frac{abc}{6} = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\times d, \qquad \text{따라서} \qquad d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

양변을 제곱하고 역수를 취하면 (모든 값이 양수이다)

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

이다. 여기서 분자의 각 항을 $a^2b^2c^2$으로 나누었다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $a = b = c = 1$로 잡자. 그러면 ABC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형(equilateral triangle)이고, 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$과 일치한다. 평면은 $x + y + z = 1$이고 O에서의 거리는 $1/\sqrt{3}$이며, 실제로 $1/d^2 = 3$이다.
- $a = 1, b = c = 2$일 때 공식으로 구하면 부피는 $\frac{2}{3}$, 넓이는 $\sqrt{6} \approx 2.449$, $d = 2/\sqrt{6} \approx 0.8165$이므로 $1/d^2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$이다.
- 무작위로 고른 10 000개의 (a, b, c)에 대하여 수치적으로 계산해 보면, 부피(스칼라 삼중곱(scalar triple product)으로 계산), 넓이(벡터곱(cross product)으로 계산), d(수선의 발(foot of the perpendicular)을 직접 구하여 계산)가 모두 10^{-12} 이내의 오차로 공식과 일치하였다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{CB}$를 함께 쓰는 실수: 방향을 섞으면 스칼라곱의 부호가 바뀌어 θ의 보각(supplement)을 얻게 된다.
- 밑면이 ABC일 때의 높이가 어느 한 모서리의 길이가 아니라 O에서 그 평면에 내린 수선의 길이라는 점을 잊는 실수.

STEP 너머

A, B, C를 지나는 평면은 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$이고 법선(normal) 벡터는 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$이므로, 점과 평면 사이의 거리 공식을 쓰면 d를 한 줄로 구할 수 있다. 넓이에 관한 결과는 3차원 피타고라스(Pythagoras) 정리(드 구아의 정리(de Gua's theorem))이다. 즉 ABC의 넓이의 제곱은 O에 모인 세 직각삼각형 면의 넓이의 제곱의 합과 같은데, $\frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$이 바로 그 합이기 때문이다. 두 아이디어 모두 벡터곱과 행렬식(determinant)에서 나오며, 이는 대학 첫 선형대수학(linear algebra) 강의 초반에 배운다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 이를 살펴보기 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.