풀이

STEP I 2006, 문제 7

순수수학 • 절댓값 기호가 있는 적분

STEP I 2006, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s1-q7

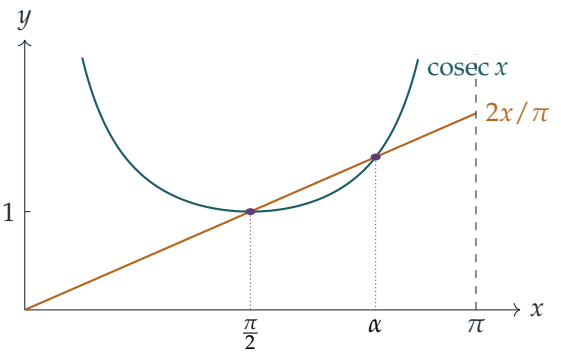
핵심 아이디어

$x\sin x = \pi/2$의 양변을 $\frac{\pi}{2}\sin x$($(0,\pi)$에서 양수이다)로 나누면 $\operatorname{cosec} x = 2x/\pi$가 된다. 따라서 근은 직선이 U자 모양의 곡선과 만나는 점이고, 직선은 볼록(convex)한 곡선과 많아야 두 번 만난다. 적분에서 절댓값(modulus)을 다룰 때 핵심은 절댓값 안의 식의 부호가 바뀌는 곳을 찾아 그곳에서 구간을 나누고, 각 조각을 알맞은 부호로 적분하는 것이다.

풀이

소문항 (i): 그래프와 근

$0 < x < \pi$에서 $\operatorname{cosec} x$는 양 끝에서 $+\infty$로 발산하고, $x = \pi/2$에 대하여 대칭이며, 그곳에서 최솟값 1을 가진다. 직선 $y = 2x/\pi$는 $(0,0)$에서 $(\pi,2)$까지 이어지며, cosec 곡선의 가장 낮은 점인 $(\pi/2,1)$을 지난다.



$(0, \pi)$에서 $\sin x > 0$이므로

$$x \sin x = \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sin x} = \frac{2x}{\pi},$$

이고, 따라서 근은 그래프에서 두 곡선이 만나는 점의 x좌표이다. 그중 하나는 바로 보인다. $\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$이므로 $x = \pi/2$가 근이다.

근이 정확히 두 개임을 확인하기 위해 $h(x) = \operatorname{cosec} x - 2x/\pi$라 하자. 그러면

$$h''(x) = \operatorname{cosec} x \left(\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x\right) > 0 \quad \text{구간} (0, \pi),$$

이므로 h는 순볼록(strictly convex)하고, 순볼록함수의 영점은 많아야 두 개이다. (만약 영점이 세 개 $a < b < c$ 있다면, b는 a와 c 사이에 엄밀히 놓이는데 $h(b)$는 $(a, 0)$과 $(c, 0)$을 잇는 현(chord)의 엄밀히 아래가 아니라 현 위에 놓이게 된다.) 이제 $h'(\pi/2) = -\cot \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} < 0$ 이므로 $\pi/2$의 바로 오른쪽에서 h는 음수이고, 한편 $x \to \pi^-$일 때 $h(x) \to +\infty$이다. 연속성(continuity)에 의해 h는 $\pi/2 < \alpha < \pi$인 영점 α를 가진다. 따라서 근은 정확히 두 개, 즉 $\pi/2$와 α이며, α가 더 큰 근이다.

소문항 (i): 적분

그래프(와 볼록성 논증)로부터, cosec 곡선은 두 근 사이에서는 직선보다 아래에 있고 α보다 오른쪽에서는 직선보다 위에 있다. $\operatorname{cosec} x \leqslant 2x/\pi$에 양수 $\frac{\pi}{2} \sin x$를 곱하면, 이는 다음을 뜻한다.

$$x \sin x - \frac{\pi}{2} \geq 0 \text{ 구간 } \left[\tfrac{\pi}{2}, \alpha\right], \qquad x \sin x - \frac{\pi}{2} \leq 0 \text{ 구간} [\alpha, \pi].$$

? **생각해 보기** 절댓값 기호는 어떻게 처리할까?

부호가 바뀌는 α에서 적분을 나누고, 두 번째 조각에서는 식에 음의 부호를 붙인 것을 적분한다.

$u = x$, $\mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x - x \cos x.$$

따라서 $x \sin x - \pi/2$의 한 원시함수(antiderivative)는

$$F(x) = \sin x - x \cos x - \frac{\pi x}{2},$$

이고, 구하려는 적분은

$$I = [F(x)]_{\pi/2}^{\alpha} - [F(x)]_{\alpha}^{\pi} = 2F(\alpha) - F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(\pi).$$

이다. 세 값은 다음과 같다.

$$F(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\alpha\pi}{2},$$
$$F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - \frac{\pi^2}{4},$$
$$F(\pi) = 0 - \pi(-1) - \frac{\pi^2}{2} = \pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

그러므로

$$I = 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \alpha\pi - 1 + \frac{\pi^2}{4} - \pi + \frac{\pi^2}{2}$$
$$= 2\sin\alpha + \frac{3\pi^2}{4} - \alpha\pi - \pi - 2\alpha\cos\alpha - 1,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

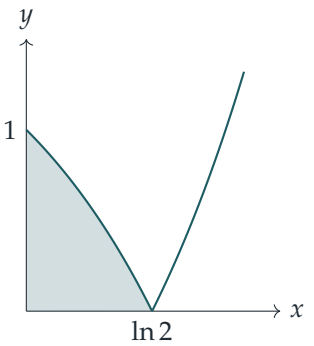
소문항 (ii)

? **생각해 보기** 두 절댓값 기호 중 실제로 역할을 하는 것은 어느 쪽일까?

양의 x축 위에서는 $x \geq 0$이므로 $\mathrm{e}^x \geq 1$이고, 안쪽의 절댓값은 아무 영향이 없다. 즉 $|\mathrm{e}^x - 1| = \mathrm{e}^x - 1$이다. 따라서 곡선은

$$y = |\mathrm{e}^x - 2| \qquad (x \geq 0).$$

이다. 이는 $0 \leq x \leq \ln 2$에서 $2 - \mathrm{e}^x$와 같아서 $x = 0$일 때의 $y = 1$에서 $x = \ln 2$일 때의 $y = 0$까지 감소하고, $x \geq \ln 2$에서는 $\mathrm{e}^x - 2$와 같아서 한없이 증가한다.



따라서 곡선은 $x = \ln 2$에서만 x축과 만나고, 양의 x축, y축, 곡선으로 둘러싸인 영역은 $0 \leq x \leq \ln 2$ 위의 색칠한 영역 하나뿐이다($\ln 2$를 넘어서면 곡선이 위로 올라가 버려 닫힌

영역이 생기지 않는다). 그 넓이는

$$\int_0^{\ln 2} (2 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \Big[2x - \mathrm{e}^x\Big]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1)$$
$$= 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

이분법(bisection)으로 $\alpha \approx 2.4433$을 얻고, 이를 (i)의 공식에 넣으면 약 0.61343이 된다. $[\pi/2, \pi]$에서 $|x\sin x - \pi/2|$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 직접 적용해도 소수점 아래 14자리까지 같은 값이 나온다. $(0, \pi)$에서 격자 탐색을 하면 $x\sin x - \pi/2$의 부호가 바뀌는 곳이 정확히 두 군데, 1.5708과 2.4433 근처에서 발견된다. (ii)에서는 $\ln 4 - 1 \approx 0.38629$이고, 이 역시 수치적분 결과와 일치한다. (i)의 부호에 대한 간단한 확인으로, 답은 양수여야 하며 실제로 양수이다.

흔한 실수

- α에서 나누지 않고 $[\pi/2, \pi]$ 전체에서 $x\sin x - \pi/2$를 그대로 적분하는 것. 이렇게 하면 절댓값의 적분이 아니라 부호 있는 넓이(signed area)(여기서는 음수)를 얻는다.
- 직선이 cosec 곡선의 최소점을 지나서 그림이 접하는 것(tangency)처럼 보일 수 있기 때문에 $x = \pi/2$에서의 근을 놓치는 것. 실제로는 접하지 않는다. 그 점에서 곡선의 기울기(gradient)는 0이고 직선의 기울기는 $2/\pi$이므로 두 그래프는 교차한다.
- (ii)에서 두 절댓값 기호를 모두 남겨 두고 너무 많은 경우로 나누는 것. $x \geq 0$을 이용하여 $\mathrm{e}^x - 1$의 부호부터 정하자.

STEP 너머

근 α는 닫힌 형태(closed form)로 나타낼 수 없지만, 그래도 적분을 α로 정확히 계산할 수 있었다. 이는 해석학에서 흔한 상황으로, 어떤 양이 공식이 아니라 방정식에 의해 결정되는 경우이다. 순볼록함수가 직선과 많아야 두 번 만난다는 사실은 볼록성이 주는 여러 깔끔한 결과 중 하나이며, 볼록성은 옌센 부등식(Jensen's inequality)과 최적화(optimisation)의 많은 부분의 바탕이 되기도 한다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 연속성, 중간값 정리(intermediate value theorem), 볼록함수를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.