풀이

STEP I 2006, 문제 6

순수수학 • 펠 방정식의 변환

> **STEP I 2006, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q6

핵심 아이디어

각 소문항은 일차 좌표 변환(linear change of coordinates)이 어떤 이차식(quadratic expression)을 보존하는지를 묻는다. 직접적인 방법은 대입하고 전개한 뒤 a^2, ab, b^2의 계수(coefficient)를 비교하는 것이다. 그 이면에는 더 깔끔한 그림이 있다. $x^2 - 2y^2$은 수 $x + y\sqrt{2}$의 "크기"이고, ($9 - 8 = 1$이라는 크기를 갖는) $3 + 2\sqrt{2}$를 곱해도 그 크기는 변하지 않는다. 이것을 알면 (iii)에서 사상을 어떻게 만들어야 하는지 정확히 알 수 있다.

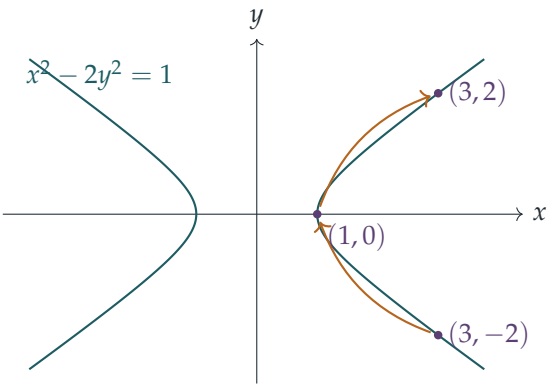
풀이

소문항 (i)

$a^2 - 2b^2 = 1$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 &= (9a^2 + 24ab + 16b^2) - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) \\ &= a^2 - 2b^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

이므로 $(3a + 4b,\ 2a + 3b)$는 요구한 대로 $x^2 - 2y^2 = 1$ 위에 있다. 사실 처음 두 줄은 모든 a와 b에 대하여 성립하는 항등식(identity)이다. 즉 이 사상은 곡선 위에서뿐만 아니라 모든 곳에서 $x^2 - 2y^2$을 보존한다.



이 사상은 점들을 오른쪽 가지를 따라 미끄러뜨린다: $(3,-2) \mapsto (1,0) \mapsto (3,2) \mapsto (17,12) \mapsto \cdots$.

소문항 (ii)

$Ma^2 - Nb^2 = 1$이라 하자. 전개하면

$$M(5a+6b)^2 - N(4a+5b)^2 = (25M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-25N)b^2.$$

상(image)인 점이 곡선 위에 있을 필요충분조건은 이 값이 $1 = Ma^2 - Nb^2$과 같은 것이다. $Ma^2 - Nb^2$을 빼면 조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= (24M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-24N)b^2 \\ &= 4(3M-2N)(2a^2+5ab+3b^2) \\ &= 4(3M-2N)(2a+3b)(a+b). \end{aligned}$$

> **생각해 보기** 정말 $3M = 2N$이어야 할까, 아니면 다른 인수들이 대신 0이 될 수도 있을까?

이 조건은 곡선 위의 **모든** 점에서 성립해야 한다. $M, N > 0$일 때 곡선 $Mx^2 - Ny^2 = 1$은 무한히 많은 점을 갖는 쌍곡선(hyperbola)이다. 직선 $2x+3y=0$과 $x+y=0$은 각각 이 곡선과 많아야 두 점에서 만나므로, 곡선 위의 대부분의 점에서 $(2a+3b)(a+b) \neq 0$이다. 따라서 $3M-2N=0$이어야 한다. 역으로 $3M = 2N$이면 조건은 모든 점에서 성립한다.

그러므로 $3M = 2N$이다. 그러면 $2 \mid 3M$이므로 M은 짝수이다. 가장 작은 선택은 $M=2$이고, 이때 $N=3$이다. 마지막으로 확인하면

$$2(5a+6b)^2 - 3(4a+5b)^2 = (50-48)a^2 + (120-120)ab + (72-75)b^2 = 2a^2 - 3b^2.$$

가장 작은 양의 정수는 $M=2, N=3$이다.

소문항 (iii)

다음을 만족하는 양의 정수를 찾으려 한다.

$$(Pa+Qb)^2-3(Ra+Sb)^2=a^2-3b^2 \quad \text{모든} a,b,$$

이 식이 모든 a,b에 대하여 성립하면 곡선 위의 모든 점의 상이 확실히 곡선 위에 놓인다. 계수를 비교하면

$$P^2-3R^2=1, \qquad PQ=3RS, \qquad Q^2-3S^2=-3.$$

첫 번째 방정식은 $x^2-3y^2=1$ 위의 양의 정수점 (P,R)을 요구한다. 가장 작은 것은 $(2,1)$이므로 $P=2$, $R=1$로 놓아 보자. 그러면 두 번째 방정식에서 $Q=\frac{3}{2}S$이고, 세 번째 방정식은 $\frac{9}{4}S^2-3S^2=-3$, 즉 $S^2=4$가 된다. 따라서 $S=2$, $Q=3$이다:

$$P=2, \quad Q=3, \quad R=1, \quad S=2.$$

확인: $(2a+3b)^2-3(a+2b)^2=4a^2+12ab+9b^2-3a^2-12ab-12b^2=a^2-3b^2=1$. 따라서 $(2a+3b,\ a+2b)$는 $x^2-3y^2=1$ 위에 있다.

? **생각해 보기** 이런 사상은 어디에서 나오는 것일까?

$(a+b\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2a+3b)+(a+2b)\sqrt{3}$으로 쓰자. $x+y\sqrt{3}$의 노름(norm) x^2-3y^2은 곱셈적(multiplicative)이고, $2+\sqrt{3}$의 노름은 $4-3=1$이므로 이것을 곱해도 노름이 보존된다. 소문항 (i)도 $3+2\sqrt{2}$로 같은 방식으로 작동한다. (ii)에서는 $(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})(5+2\sqrt{6})=(5a+6b)\sqrt{2}+(4a+5b)\sqrt{3}$이며, 그래서 그곳에 형식 $2x^2-3y^2$이 나타나는 것이다. (iii)에는 다른 답도 가능하다. $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$을 곱하면 $(7a+12b,\ 4a+7b)$를 얻는다.

검산

- $x^2-3y^2=1$ 위의 $(1,0)$에서 시작하자. (iii)의 사상을 반복하면 $(2,1)$, $(7,4)$, $(26,15)$, $(97,56)$을 얻고, 각각 $x^2-3y^2=1$을 만족한다(예를 들어 $26^2-3\cdot 15^2=676-675=1$).
- (ii)에서 $(1/\sqrt{2},0)$은 $2x^2-3y^2=1$ 위에 있고 $(5/\sqrt{2},\ 4/\sqrt{2})$로 옮겨진다. 그러면 $2\cdot\frac{25}{2}-3\cdot\frac{16}{2}=25-24=1$이다.
- $1\le M,N<30$ 범위에서 각 쌍곡선의 실제 점들을 검사하는 전수 탐색을 해 보면 $(2,3)$이 조건을 만족하는 가장 작은 쌍임이 확인된다.

흔한 실수

- (ii)에서 ab의 계수만 0으로 놓고, 그때 a^2과 b^2의 계수가 M과 $-N$이 되는지 확인하지 않는 것. 여기서는 그렇게 되지만, 그것은 보여야 한다.
- 문제에서는 곡선 위의 점만 주어졌는데 근거 없이 "항등식이 모든 a, b에 대하여 성립해야 한다"고 말하는 것. 위의 인수분해(factorisation)처럼 다른 인수들이 0이 되는 경우를 배제하는 논증이 필요하다.

STEP 너머

이것들은 펠 방정식(Pell equation) $x^2 - dy^2 = 1$이다. 그 정수해들은 환(ring) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$에서 기본 단위(fundamental unit) $x_1 + y_1\sqrt{d}$의 거듭제곱으로 생성되며, 여기의 사상들은 바로 이러한 단위를 곱하는 것이다. 행렬(matrix)의 언어로 말하면, 각 사상은 이차형식(quadratic form)을 보존하는 2×2 정수 행렬, 즉 "정수 직교군(integral orthogonal group)"의 원소이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)에는 연분수(continued fractions)를 이용하여 펠 방정식을 다루는 한 장 분량의 훌륭한 설명이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.