풀이

STEP I 2006, 문제 5

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2006, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q5

핵심 아이디어

두 피적분함수(integrand) 모두 다루기 까다로운 제곱근을 포함하고 있다. 일차식의 제곱근을 없애는 가장 깔끔한 방법은 그 제곱근 전체를 새로운 변수로 두는 것이다. 제곱근이 사라지고 나면 남는 것은 유리함수(rational function)이고, 유리함수는 부분분수(partial fractions)를 이용하면 언제나 적분할 수 있다. (ii)에서는 지수함수를 먼저 없애서 제곱근 안이 일차식이 되도록 하는 것이 가장 좋고, 그러면 같은 방법을 그대로 적용할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$x > 4$이므로 $2x+1 > 9$이고, 따라서 $u = \sqrt{2x+1} > 3$으로 둘 수 있다. $u^2 = 2x+1$로부터

$$2u\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u,$$

이고

$$x - 4 = \frac{u^2-1}{2} - 4 = \frac{u^2-9}{2}.$$

이다. 치환(substitution)하면

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{\frac{1}{2}(u^2-9)\,u}\,u\,\mathrm{d}u = \int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u.$$

이다. $\mathrm{d}x$에서 나온 인수 u가 제곱근을 정확히 약분한다. 이 치환이 잘 통하는 이유가 바로 이것이다. 이제 $u^2-9 = (u-3)(u+3)$이고

$$\frac{6}{(u-3)(u+3)} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3},$$

이다. 이는 다시 통분해 보면 확인할 수 있다. 분자는 $(u+3)-(u-3)=6$이다. 그러므로

$$\int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u = \ln(u-3)-\ln(u+3)+K = \ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right)+K,$$

이다. 여기서 $u>3$이므로 $u-3$과 $u+3$이 모두 양수이고, 따라서 절댓값 기호(modulus signs)는 필요 없다. $u=\sqrt{2x+1}$을 다시 대입하면

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{2x+1}+3}\right)+K,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

주어진 적분을 I라 하자. (i)을 따라 하는 자연스러운 치환은 제곱근에 이름을 붙이는 것이다.

$$w=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}, \qquad w^2=\mathrm{e}^x+1.$$

그러면 $2w\,\mathrm{d}w=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$이므로 $\mathrm{d}x=\dfrac{2w}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}w=\dfrac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w$이다. 적분 구간의 끝(limits)은 다음과 같이 바뀐다.

$$x=\ln 3:\ w=\sqrt{3+1}=2, \qquad x=\ln 8:\ w=\sqrt{8+1}=3.$$

따라서

$$I=\int_2^3 \frac{2}{(w^2-1)\,w}\cdot\frac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w=\int_2^3 \frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w.$$

이다.

생각해 보기 긴 계산 없이 $\dfrac{4}{(w^2-1)^2}$을 부분분수로 나누려면 어떻게 해야 할까?

간단한 분해 $\dfrac{2}{w^2-1}=\dfrac{1}{w-1}-\dfrac{1}{w+1}$에서 출발하여 양변을 제곱한다.

$$\begin{aligned}\frac{4}{(w^2-1)^2} &= \frac{1}{(w-1)^2}-\frac{2}{(w-1)(w+1)}+\frac{1}{(w+1)^2}\\ &= \frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{(w+1)^2}-\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w+1},\end{aligned}$$

여기서 가운데 항에 간단한 분해를 한 번 더 사용하였다. 이제 각 항은 보자마자 적분할 수 있다.

$$\int \frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{w-1}-\frac{1}{w+1}-\ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right)+C,$$

적분 구간에서 $w \geq 2$이므로 절댓값 기호는 필요 없다. 값을 계산하면

$$\begin{aligned} \text{위끝} w=3: &\quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\ln\tfrac{2}{4} = -\tfrac{3}{4}+\ln 2, \\ \text{아래끝} w=2: &\quad -1-\tfrac{1}{3}-\ln\tfrac{1}{3} = -\tfrac{4}{3}+\ln 3. \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$I = \left(-\tfrac{3}{4}+\ln 2\right) - \left(-\tfrac{4}{3}+\ln 3\right) = \frac{7}{12}+\ln\frac{2}{3},$$

이고, 이것이 보여야 할 결과이다.

이 계산은 두 단계로 나누어 할 수도 있다. 먼저 $v = \mathrm{e}^x$로 치환하고($\int_3^8 \frac{2}{v^2\sqrt{v+1}}\,\mathrm{d}v$가 된다) 다음에 $w^2 = v+1$로 치환하면 된다. 위의 치환은 이 두 단계를 한 번에 처리한 것이다.

검산

- (i)의 답을 미분해 보자. $u = \sqrt{2x+1}$이면 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}$이고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\frac{u-3}{u+3} = \frac{6}{u^2-9}$이므로, 도함수는 $\frac{6}{u(u^2-9)} = \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}$이다.
- 수치로 확인하면 $\frac{7}{12}+\ln\frac{2}{3} \approx 0.58333 - 0.40547 = 0.17787$이고, 원래의 피적분함수에 $[\ln 3, \ln 8]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.177868을 얻어 유효숫자 여섯 자리까지 일치한다.
- 부호와 크기에 대한 상식적인 점검: (ii)의 피적분함수는 양수이고, 길이가 $\ln\frac{8}{3} \approx 0.98$인 구간에서 약 0.33에서 약 0.08로 감소한다. 따라서 0.2보다 약간 작은 답은 예상과 정확히 맞는다.

흔한 실수

- (ii)에서 변수를 바꿀 때 적분 구간의 끝을 바꾸는 것을 잊거나, x에 대한 구간의 끝을 w에 대한 식에 대입하는 실수.
- $\frac{4}{(w^2-1)^2}$을 $\frac{A}{(w-1)^2}+\frac{B}{(w+1)^2}$로만 쓰는 실수. 중복된 인수가 있을 때는 일차 항 $\frac{1}{w-1}$과 $\frac{1}{w+1}$도 필요하다.
- (i)에서 $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$ 대신 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$를 얻어서 제곱근이 남아 버리는 실수.

STEP 너머

두 소문항이 모두 로그와 유리식 항으로 끝나는 데에는 일반적인 정리가 있다. 모든 유리함수는 부분분수를 통해 유리함수, 로그, 역탄젠트로 이루어진 초등적인 원시함수(antiderivative)를 가진다. 또한 x와 $\sqrt{ax+b}$에 대한 유리식인 피적분함수는 치환

$u^2 = ax + b$를 하면 유리함수가 된다. 이를 이차식의 제곱근으로 확장하면 오일러(Euler) 치환에 이르고, 어떤 적분을 초등함수로 **나타낼 수 없는지** 묻다 보면 리우빌(Liouville)의 유한 형태 적분 이론에 이른다. 적분과 그것이 성립하는 이유를 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.