풀이

STEP I 2006, 문제 4

순수수학 • 정다각형의 넓이

STEP I 2006, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

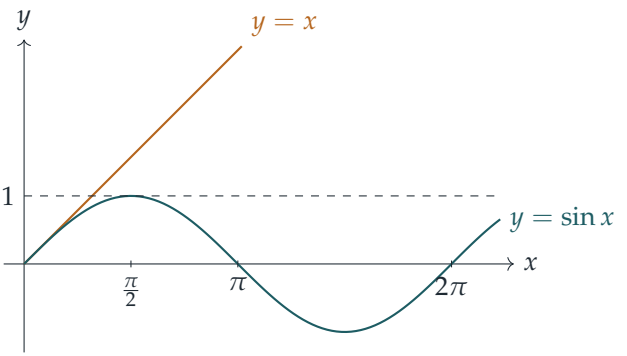
step.maths.org/questions/06-s1-q4

핵심 아이디어

직선 $y = x$는 원점에서 $y = \sin x$에 그은 접선(tangent)이고, 사인 곡선은 이 접선 아래쪽으로 휘어져 멀어진다. 이 그림 하나로 부등식(inequality)과 근사(approximation)를 모두 얻는다. 다각형은 중심에서 만나는 n개의 합동(congruent)인 이등변삼각형(isosceles triangle)으로 나눈다. 그러면 모든 양이 반각 π/n에 대한 삼각함수 문제가 되고, 도함수(derivative)의 부호를 정하는 것이 바로 부등식 $\sin x < x$임을 알게 된다.

풀이

두 그래프



$x = 0$에서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x = 1$이므로, 두 곡선은 모두 원점을 지나고 그 점에서의 기울기가 1이다. 따라서 $y = x$는 O에서 사인 곡선에 그은 접선이다.

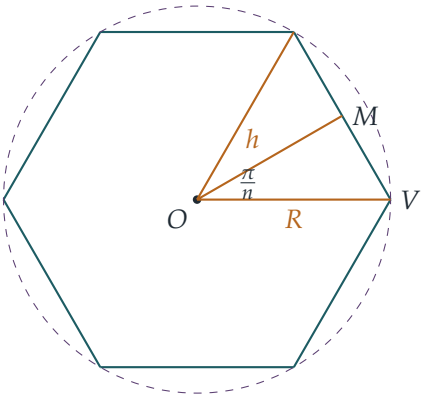
(i) $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$에서 사인 곡선은 위로 볼록(concave)하므로($\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$), O에

서의 접선 아래에 놓이고, 따라서 $\sin x < x$이다. (같은 내용을 이렇게 말할 수도 있다. $g(x) = x - \sin x$는 $g(0) = 0$이고 $0 < x < 2\pi$에서 $g'(x) = 1 - \cos x > 0$이므로, g는 그 구간에서 순증가(strictly increasing)한다.) $x > \frac{\pi}{2}$이면 $\sin x \le 1 < \frac{\pi}{2} < x$이다. 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $x > \sin x$이다.

(ii) 직선이 O에서의 접선이므로, 원점 가까이에서 두 그래프는 거의 구별되지 않는다. 즉 x가 작으면 높이 $\sin x$는 높이 x와 매우 가까우므로 $\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$이다. (더 정밀하게 말하면, $x > 0$에서 $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$이므로 $1 - \frac{x^2}{6} \le \frac{\sin x}{x} < 1$이다.)

다각형의 넓이

다각형의 중심 O와 각 꼭짓점을 잇는다. 그러면 다각형은 n개의 합동인 이등변삼각형으로 나뉘고, 각 삼각형의 밑변은 한 변 $s = P/n$이며 O에서의 꼭지각(apex angle)은 $2\pi/n$이다. O에서 한 변의 중점(midpoint) M으로 수선(perpendicular)을 내리면, 이 수선은 꼭지각을 이등분한다.



직각삼각형 OMV(V는 꼭짓점)에서 O에서의 각은 π/n이고 $MV = \frac{1}{2}s$이다. 따라서 중심에서 한 변까지의 거리 $h = OM$은

$$h = \frac{s/2}{\tan(\pi/n)} = \frac{P}{2n\tan(\pi/n)}.$$

이다. n개의 삼각형 각각의 넓이가 $\frac{1}{2}sh$이므로, 다각형의 넓이는

$$A = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{n} \cdot \frac{P}{2n\tan(\pi/n)} = \frac{P^2}{4n\tan(\pi/n)},$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

n이 커지면 넓이가 증가한다

P를 고정하고 $A = \dfrac{P^2}{4f(n)}$으로 쓰자. 여기서 $f(n) = n\tan\dfrac{\pi}{n}$이다. $n \geq 3$이면 $f(n) > 0$이므로, A가 증가하는 것은 정확히 f가 감소할 때이다. 곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$f'(n) = \tan\frac{\pi}{n} + n\sec^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(-\frac{\pi}{n^2}\right) = \tan\theta - \theta\sec^2\theta, \qquad \text{여기서} \theta = \frac{\pi}{n}.$$

생각해 보기 $\tan\theta - \theta\sec^2\theta$의 부호는 어떻게 정할까?

양수인 인수 $\sec^2\theta$를 묶어 내고 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$를 이용하면

$$f'(n) = \sec^2\theta\,(\sin\theta\cos\theta - \theta) = \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\,(\sin 2\theta - 2\theta).$$

이다. $n \geq 3$이면 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$이므로 $2\theta > 0$이고, (i)에 의해 $\sin 2\theta < 2\theta$이다. 따라서 $f'(n) < 0$이고

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} = -\frac{P^2 f'(n)}{4f(n)^2} > 0.$$

이다. 그러므로 둘레(perimeter)가 고정되어 있을 때 n이 커지면 넓이는 증가한다.

외접원과의 비교

다각형을 품는 가장 작은 원은 외접원(circumcircle), 즉 중심이 O이고 모든 꼭짓점을 지나는 원이다. 이보다 작은 원으로는 안 된다는 것을 보이기 위해, 꼭짓점을 $V_1, \ldots, V_n$이라 하고 $\overrightarrow{OV_k} = \mathbf{v}_k$, $|\mathbf{v}_k| = R$라 하자. 대칭성에 의해 $\sum \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$이므로, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$인 임의의 점 C에 대하여

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{v}_k - \mathbf{c}|^2 = R^2 - \frac{2}{n}\,\mathbf{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k + |\mathbf{c}|^2 = R^2 + |\mathbf{c}|^2 \geq R^2.$$

이다. 따라서 C로부터의 거리가 R 이상인 꼭짓점이 있고, 중심이 C이며 다각형을 품는 원의 반지름은 R 이상이다. 외접원의 반지름(circumradius)은 $R = OV$이고, 같은 직각삼각형에서

$$\tfrac{1}{2}s = R\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{P}{2n\sin\theta}.$$

이다. 따라서 넓이의 비는

$$\frac{A}{\pi R^2} = \frac{P^2}{4n\tan\theta}\cdot\frac{4n^2\sin^2\theta}{\pi P^2} = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\theta},$$

이다. 여기서 $n/\pi = 1/\theta$를 이용했다. n이 크면 $2\theta = 2\pi/n$이 작으므로, (ii)에 의해 이 비는 근사적으로 1이다.

검산

정사각형($n = 4, \theta = \pi/4$)의 경우 공식은 $A = P^2/16$을 주는데, 한 변이 $P/4$이므로 옳다. 넓이의 비는 $\sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi \approx 0.637$이며, 이는 단위원에 내접하는 한 변 $\sqrt{2}$인 정사각형과 일치한다. 정육각형의 경우 비는 $3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827$이다. $n = 3, \ldots, 39$에 대하여 넓이 공식을 신발끈 공식(shoelace formula)과 대조해 확인했고, $f'(n) < 0$을 수치 미분과 대조해 확인했으며, 비가 $n = 100$에서 0.99934, $n = 1000$에서 0.9999934임을 얻었다.

흔한 실수

- 직각삼각형에서 반각 π/n 대신 꼭지각 전체 $2\pi/n$을 사용한다.
- $\tan(\pi/n)$을 미분할 때 연쇄법칙에서 나오는 인수 $-\pi/n^2$을 빠뜨린다.
- "$\tan\theta \approx \theta$이므로" $\tan\theta < \theta\sec^2\theta$라고 주장한다. 근사로는 부호를 결정할 수 없다. 부호를 결정하는 것은 정확한 부등식 $\sin 2\theta < 2\theta$이다.

STEP 너머

극한(limit) $\sin x/x \to 1$은 $\sin x$의 도함수가 $\cos x$가 되게 하는 사실이며, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 이를 그림이 아니라 sin의 정의로부터 엄밀하게 증명한다. 단조성(monotonicity) 결과는 등주부등식(isoperimetric inequality)을 이산적으로 엿본 것이다. 주어진 길이의 모든 닫힌곡선 가운데 원이 가장 넓은 영역을 둘러싸며, 다각형의 넓이는 원의 넓이 $P^2/(4\pi)$를 향해 증가한다. 극한과 도함수를 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.