풀이

STEP I 2006, 문제 3

순수수학 • 다항식의 근

> **STEP I 2006, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q3

핵심 아이디어

공식이 아니라 그래프를 생각한다. 축 아래에서 출발해 반드시 축 위에서 끝나는 곡선은 축을 가로질러야 하고, $x = 0$에서의 값(상수항)은 원점에서 곡선이 축의 어느 쪽에 있는지 알려 준다. 삼차식에서는 극점(turning point)이 핵심 역할을 한다. 곡선이 축을 세 번 가로지르는 것은 극댓값(local maximum)이 축 위에 있고 극솟값(local minimum)이 축 아래에 있을 때, 그리고 그때에만이다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = x^2 + bx + c$라 하자. 그래프는 위로 볼록한 대신 아래로 볼록한, 즉 위로 열린 포물선이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이다. $c < 0$이면 $f(0) = c < 0$이다. 즉 곡선은 $x = 0$에서 축 아래에 있다.

f는 연속(continuous)이고, 절댓값이 큰 음수 x에서 양수이며 0에서 음수이므로 $(-\infty, 0)$의 어딘가에서 축을 가로지른다. 같은 방식으로 $(0, \infty)$에서도 한 번 더 가로지른다. 이 두 근은 0의 서로 반대쪽에 있으므로 서로 다르다. 이차방정식의 근은 많아야 두 개이므로, 이 방정식은 서로 다른 실근을 정확히 두 개 가지며 하나는 음수, 하나는 양수이다. 따라서 $c < 0$은 **충분조건**(*sufficient condition*)이다.

그러나 이것은 **필요조건**(*necessary condition*)이 아니다. 예를 들어 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$는 서로 다른 실근 1과 2를 갖지만 $c = 2 > 0$이다. (필요충분조건은 $b^2 > 4c$이다. $c < 0$이면 $b^2 \geq 0 > 4c$이므로 이 조건은 저절로 성립한다.)

소문항 (ii)

방정식이 서로 다른 두 양의 근을 가질 필요충분조건은

$$b^2 > 4c, \qquad b < 0, \qquad c > 0.$$

임을 보이자.

필요성. 두 근이 $\alpha \neq \beta$이고 $\alpha, \beta > 0$이라 하자. 그러면 $x^2 + bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$$c = \alpha\beta > 0, \qquad b = -(\alpha+\beta) < 0, \qquad b^2 - 4c = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 > 0.$$

충분성. $b^2 > 4c$이면 두 근 α, β는 서로 다른 실수이다. 두 근의 곱은 $c > 0$이므로 두 근의 부호는 같다. 두 근의 합은 $-b > 0$이므로 그 공통 부호는 양이다.

> ? **생각해 보기** 왜 $b < 0$과 $c > 0$만으로는 충분하지 않을까?

$x^2 - x + 1$을 생각하자. 여기서 $b = -1 < 0$이고 $c = 1 > 0$이지만 $b^2 - 4c = -3 < 0$이므로 실근이 전혀 없다. 그래프로 말하면, $c > 0$은 $x = 0$에서 곡선을 축 위에 두고, $b < 0$은 꼭짓점을 $x = -\frac{b}{2} > 0$에 둔다. 여기에 더해 꼭짓점이 축 아래에 있어야 한다. 꼭짓점의 높이는 $c - \frac{b^2}{4}$이고, 이것이 음수일 필요충분조건은 $b^2 > 4c$이다. 세 조건이 모두 필요하다.

소문항 (iii)

$g(x) = x^3 + px + q$라 하면 $g'(x) = 3x^2 + p$이다. 실계수 삼차식은 중복도(multiplicity)를 세어 세 개의 근을 가지며, 실수가 아닌 근은 켤레복소수(complex conjugate) 쌍으로 나타난다. 또한 두 경우 모두 $g(0) = q < 0$임에 주목하자.

$p > 0, q < 0$인 경우. 이때 모든 x에 대하여 $g'(x) = 3x^2 + p > 0$이므로 g는 순증가(strictly increasing)하고 실근을 정확히 하나 갖는다. $g(0) = q < 0$이고 g가 증가하므로 이 근은 양수이다. 나머지 두 근은 실수가 아닌 켤레복소수 쌍이다.

따라서 양수인 단순근(simple root) 하나와 실수가 아닌 켤레복소수 근 두 개가 있다.

$p < 0, q < 0$인 경우. $a > 0$에 대하여 $p = -3a^2$, 즉 $a = \sqrt{-p/3}$으로 쓰자. 그러면 $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$이므로 g는 $(-\infty, -a]$에서 증가하고, $[-a, a]$에서 감소하며, $[a, \infty)$에서 증가한다. $x = -a$에서 극대, $x = a$에서 극소이고

$$g(-a) = -a^3 + 3a^3 + q = 2a^3 + q, \qquad g(a) = a^3 - 3a^3 + q = q - 2a^3.$$

이다. $q < 0$이므로 극솟값 $g(a)$는 음수이다. $[0, a]$에서 g는 $g(0) = q < 0$에서부터 감소하므로 이 구간에는 근이 없다. $[a, \infty)$에서는 $g(a) < 0$에서 $+\infty$까지 증가하므로 a보다 큰 근을

정확히 하나 가지며, 이 근은 양수이다. 다른 실근이 있다면 $(-\infty, -a]$ 또는 $(-a, 0)$에 있어야 하므로 음수이고, 그런 근이 존재하는지는 오직 극댓값 $g(-a)$의 부호에 달려 있다.

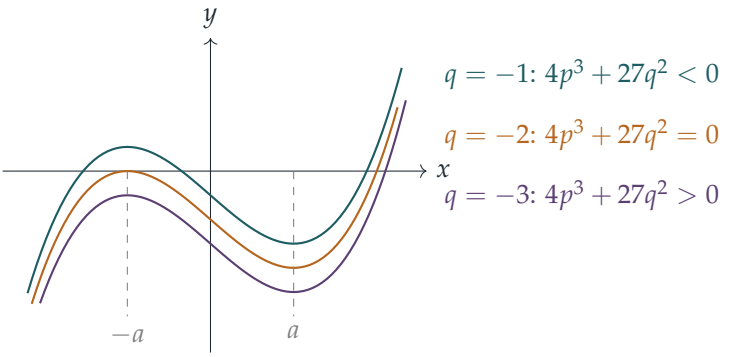
생각해 보기 $g(-a)$의 부호는 $4p^3 + 27q^2$와 어떻게 연결될까?

두 극값을 곱하면

$$g(-a)\,g(a) = (q + 2a^3)(q - 2a^3) = q^2 - 4a^6 = q^2 - 4\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}.$$

이다. $g(a) < 0$이므로 $g(-a)$의 부호는 $4p^3 + 27q^2$의 부호와 반대이다. 세 가지 경우가 있다.

- $4p^3 + 27q^2 > 0$. 이때 $g(-a) < 0$이므로 $(-\infty, a]$ 전체에서 $g < 0$이다(음수 값 $g(-a)$까지 증가한 뒤 감소한다). 유일한 실근은 양의 근이다. 앞에서와 같이 양의 실근 하나와 실수가 아닌 켤레복소수 근 두 개가 있다.
- $4p^3 + 27q^2 = 0$. 이때 $g(-a) = 0$이고 $g'(-a) = 0$이므로 $x = -a$는 중근(repeated root)이다. 근의 합이 0이므로(x^2항이 없다) 세 번째 근은 $2a$이다. 근은 $-a$, $-a$, $2a$이다. 즉 음의 이중근 하나와 양의 단순근 하나이며, 모두 실근이다.
- $4p^3 + 27q^2 < 0$. 이때 $g(-a) > 0$이다. $x \to -\infty$일 때 $g(x) \to -\infty$이므로 $(-\infty, -a)$에 근이 하나 있다. $g(-a) > 0 > g(0)$이므로 $(-a, 0)$에 또 하나가 있다. a보다 큰 근과 합하면 서로 다른 세 실근, 즉 음의 근 두 개와 양의 근 하나를 얻는다.



그림은 $q = -1, -2, -3$에 대하여 $y = x^3 - 3x + q (p = -3, a = 1)$를 나타낸다. 극댓값을 축 위로 끌어올리면 실근 하나가 세 개로 바뀐다.

$q < 0$인 모든 경우에 양의 근은 정확히 하나이다. 이는 근의 곱이 $-q > 0$이라는 사실과 일치한다.

검산

- $p = -3, q = -1$이면 $4p^3 + 27q^2 = -108 + 27 = -81 < 0$이고, 수치적으로 근은 약 $-1.532, -0.347, 1.879$이다. 예측대로 음의 근 두 개와 양의 근 하나이다.
- $p = -3, q = -2$이면 $4p^3 + 27q^2 = 0$이고 $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$이므로 근은 $-1, -1, 2$이다.
- 각 경우에 대해 무작위로 고른 수천 개의 (p, q)에 수치적 근 찾기 프로그램을 적용하고, 무작위 (b, c)를 (ii)의 조건과 대조해 본 결과, 위의 모든 주장과 일치하였다.

흔한 실수

- (ii)에서 $b < 0$과 $c > 0$만 제시하고($b < 0, c > 0$은 근이 실수**라면** 양수임을 보장할 뿐이다) $b^2 > 4c$를 빠뜨리는 것.
- (ii)에서 필요성만, 또는 충분성만 증명하는 것. "필요충분"이라면 양방향을 모두 보여야 한다.
- (iii)에서 중근이 생기는 경계의 경우 $4p^3 + 27q^2 = 0$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

$-(4p^3 + 27q^2)$은 삼차식 $x^3 + px + q$의 **판별식**(*discriminant*)으로, $b^2 - 4ac$에 정확히 대응하는 양이다. 이 값은 근들의 차의 제곱을 모두 곱한 것과 같으므로, 중근이 있을 때 그리고 그때에만 0이 되고, 세 근이 모두 서로 다른 실수일 때 그리고 그때에만 양수가 된다. 판별식, 그리고 근과 계수 사이의 관계는 갈루아 이론(Galois theory)과 어떤 방정식이 거듭제곱근으로 풀리는가(solvable by radicals)라는 질문으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 출발점으로 삼기 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.