풀이

STEP I 2006, 문제 2

순수수학 • 넓이와 최적화

> **STEP I 2006, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q2

핵심 아이디어

말뚝의 위치를 한 모서리로부터의 거리 x라는 하나의 수로 정하고, 밧줄이 헛간을 감아 돌아가는 모습을 따라가 본다. 그러면 풀을 뜯을 수 있는 영역은 반원 하나와 사분원 네 개로 나뉘고, 각 사분원의 반지름은 x에 대한 간단한 일차함수(linear function)이다. 따라서 A는 닫힌구간(closed interval)에서 정의된 x에 대한 이차식(quadratic)이고, 문제의 두 부분은 모두 이 이차식의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 된다.

풀이

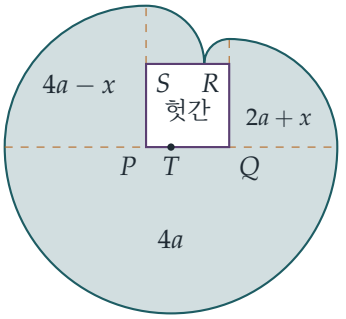
설정하기

헛간을 $PQRS$라 하고, 염소가 변 PQ 위의 점 T에 매여 있다고 하자. 여기서 $0 \le x \le 2a$에 대하여 $PT = x$, $TQ = 2a - x$이다. 대칭성(symmetry)에 의해 염소가 어느 변에 매여 있는지는 상관없다.

헛간을 피해 T에서 어떤 점까지 가는 최단 경로의 길이가 $4a$ 이하이면 염소는 그 점에 닿을 수 있다. 밧줄이 팽팽할 때 이 경로는 헛간의 모서리에서 꺾이는 곳을 제외하면 직선이다. T에서 출발하여 헛간을 한 바퀴 돌아가 보자.

- **PQ의 앞쪽.** 직선 PQ의 바깥쪽에 있는 모든 점은 T에서 바로 보이므로, 염소는 반지름이 $4a$인 반원 영역의 풀을 뜯는다.
- **PS와 QR의 옆쪽.** 밧줄이 P를 돌아 꺾이면 $4a - x$가 남고, 이 밧줄은 변 PS 옆으로 P를 중심으로 하는 사분원을 그린다. 마찬가지로 Q에서는 $4a - (2a - x) = 2a + x$가 남아 QR 옆으로 Q를 중심으로 하는 사분원이 생긴다.

▶ **헛간의 뒤쪽.** $x \le 2a$이므로 $4a - x \ge 2a$이다. 따라서 밧줄은 S에 닿고도 $(4a - x) - 2a = 2a - x$가 남으며, 이 밧줄은 변 SR 뒤로 S를 중심으로 하는 사분원을 그린다. 같은 방법으로 밧줄은 R에 닿고도 $(2a + x) - 2a = x$가 남아, R를 중심으로 하고 반지름이 x인 사분원이 생긴다.



? **생각해 보기** 헛간 뒤쪽의 두 조각이 겹쳐서 어떤 풀을 두 번 세게 될 수도 있을까?

S와 R를 중심으로 하는 두 사분원은 직선 SR의 같은 쪽에 놓여 있다. 두 반지름 $2a - x$와 x의 합은 $2a = SR$이므로, 두 원은 SR 위에서 S로부터 $2a - x$만큼 떨어진 점에서 딱 접한다. 따라서 두 조각은 겹치지 않으며, 둘을 합하면 염소는 변 SR 전체에 닿을 수 있다. 다른 조각들도 겹치지 않는다. 반원은 직선 PQ의 한쪽에 있고 네 사분원은 반대쪽에 있으며, 각 사분원은 헛간의 옆이나 뒤에 있는 자신만의 영역에 놓인다. 또한 헛간 뒤쪽의 점은 S 또는 R로부터 남은 밧줄 길이 이내에 있을 때, 그리고 그때에만 닿을 수 있으므로 빠뜨린 부분도 없다.

넓이

반원과 네 사분원의 넓이를 더하면

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\pi(4a)^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left[(4a - x)^2 + (2a + x)^2 + (2a - x)^2 + x^2\right] \\ &= 8\pi a^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left(4x^2 - 8ax + 24a^2\right) \\ &= \pi\left(x^2 - 2ax + 14a^2\right) \\ &= \pi\left[(x - a)^2 + 13a^2\right]. \end{aligned}$$

이 식은 $[0, 2a]$의 모든 x에 대하여 성립한다. 양 끝($x = 0$ 또는 $x = 2a$, 즉 염소가 모서리에 매여 있을 때)에서는 사분원 하나가 한 점으로 줄어들고, 반원과 반지름이 $4a$인 사분원이 합쳐져 원의 4분의 3이 되는데, 이는 예상한 그대로이다.

최댓값과 최솟값

$0 \le x \le 2a$에서 $-a \le x - a \le a$이므로 $0 \le (x-a)^2 \le a^2$이다. 따라서

$$13\pi a^2 \le A \le 14\pi a^2,$$

이므로 $A \le 14\pi a^2$이 증명된다. 오른쪽 등호는 $x = 0$ 또는 $x = 2a$일 때, 즉 염소가 모서리에 매여 있을 때, 그리고 그때에만 성립한다. 왼쪽 경계는 $x = a$일 때 도달하므로 A의 최솟값은

$$A_{\min} = 13\pi a^2,$$

이고, 이는 염소가 한 변의 중점에 매여 있을 때이다.

검산

- 모서리($x = 0$)에서는 반지름이 $4a$인 원의 4분의 3($12\pi a^2$), 이웃한 변의 반대쪽 모서리를 중심으로 하는 반지름 $2a$인 사분원(πa^2), 헛간 뒤쪽의 반지름 $2a$인 사분원(πa^2)이 생긴다. 이를 모두 더하면 식이 말하는 대로 $14\pi a^2$이다.
- $a = 1$로 두고 촘촘한 격자 위에서, 헛간을 돌아가는 실제 최단 거리(직선, 또는 모서리에서 꺾인 선)로 각 점을 판정하여 풀을 뜯은 넓이를 어림하였다. 중점에서는 $13\pi \approx 40.841$에 대해 40.845를, 모서리에서는 $14\pi \approx 43.982$에 대해 43.988을 얻었고, 다른 말뚝 위치에서도 비슷하게 잘 맞았다.

흔한 실수

- 헛간 뒤쪽의 조각을 빠뜨리는 것. 밧줄은 양쪽에서 각각 모서리 두 개를 돌아갈 만큼 길다.
- 헛간 뒤쪽의 두 조각이 겹칠까 걱정하거나, 계산에 억지로 겹치는 부분을 넣는 것. 두 반지름의 합은 항상 정확히 $2a$이므로 두 원은 접하기만 한다.

STEP 너머

팽팽한 밧줄은 장애물이 있는 영역에서의 최단 경로인 **측지선**(geodesic)을 따른다. 여기서 측지선은 헛간의 모서리에서만 꺾이는 선분들로 이루어지므로, 염소가 닿을 수 있는 집합은 비유클리드(non-Euclidean) 방식으로 거리를 재었을 때의 "공"(ball)이다. 장애물을 피해 가는 최단 경로는 변분법(calculus of variations)과 컴퓨터 과학의 운동 계획(motion planning) 문제로 이어진다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제

집)에는 세심한 경우 나누기를 통해 기하 문제를 간단한 대수 문제로 바꾸는 이런 종류의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.