풀이

STEP I 2006, 문제 11

역학 • 탄성 충돌

> **STEP I 2006, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q11

핵심 아이디어

충돌을 하나씩 따라갈 수는 없다. $A_1, \ldots, A_{n-2}$의 질량조차 모르기 때문이다. 대신 **최종** 상태만 살펴본다. 최종 상태를 제약하는 사실은 두 가지이다. 첫째, 운동량(momentum)과 운동 에너지(kinetic energy)는 처음과 끝이 같다. 둘째, 충돌이 모두 끝난 뒤에는 어떤 입자도 바로 앞의 입자를 따라잡고 있을 수 없으므로, 최종 속도는 홈을 따라 (넓은 의미로) 증가한다. 그러면 각 소문항은 이 두 사실이 어떤 최종 상태를 허용하는지에 대한 짧은 논증이 된다.

풀이

설정하기

입자들을 마찰 없이 직선 위를 움직이는 점으로 모형화하고, 모든 충돌은 완전 탄성 충돌(perfectly elastic collision)이라고 하자. A_0의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 잡고, v_k를 A_k의 최종 속도라 하자($k = 0, 1, \ldots, n$). A_k의 질량을 m_k라 쓰면 $m_0 = m_{n-1} = m$이고 $m_n = \lambda m$이다. 보존 법칙(conservation law)에 의해

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k = mu, \tag{M}$$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k^2 = mu^2. \tag{E}$$

입자들은 홈 안에서 서로를 지나칠 수 없으므로 $A_0, A_1, \ldots, A_n$의 순서를 유지한다. 마지막에 어떤 k에 대해 $v_k > v_{k+1}$이면, A_k가 A_{k+1}을 따라잡아 충돌이 한 번 더 일어날 것이다. 따

라서 모든 충돌이 끝난 뒤에는

$$v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_n. \qquad \text{(O)}$$

특히 앞으로 움직이는 입자의 앞에는 정지한 입자가 없어야 하고, 뒤로 움직이는 입자의 뒤에는 정지한 입자가 없어야 한다.

소문항 (i)

마지막에 A_j만 속도 v로 움직인다고 하자. 그러면 (M)과 (E)에서 $m_j v = mu, m_j v^2 = mu^2$이다. 두 식을 나누면 $v = u$이고, 따라서 $m_j = m$이다.

$v = u > 0$이므로, 순서 조건 (O)에 따르면 A_j 앞에 있는 모든 입자의 속도는 u 이상이어야 한다. 그런데 그 입자들은 모두 정지해 있으므로 그런 입자는 없어야 하고, $A_j = A_n$이다. 하지만 $\lambda > 1$이므로 A_n의 질량은 $\lambda m \neq m$이다. 이는 모순이므로, 마지막에 정확히 한 입자만 움직이고 있을 수는 없다.

소문항 (ii)

A_{n-1}과 A_n만 각각 속도 p와 q로 움직인다고 하자. (M)과 (E)를 m으로 나누면

$$p + \lambda q = u, \qquad p^2 + \lambda q^2 = u^2.$$

둘째 식에 $p = u - \lambda q$를 대입하면 $-2\lambda uq + \lambda^2 q^2 + \lambda q^2 = 0$, 즉

$$\lambda q((1+\lambda)q - 2u) = 0.$$

A_n이 움직이므로 $q \neq 0$이어야 하고, 따라서

$$q = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad p = u - \frac{2\lambda u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{1+\lambda} < 0.$$

즉 A_{n-1}은 뒤로 움직이게 된다. 그런데 $n \ge 2$이므로 그 뒤에 입자 A_{n-2}가 있고, 가정에 의해 이 입자는 정지해 있다. 그러면 $v_{n-2} = 0 > p = v_{n-1}$이 되어 (O)에 모순이다. A_{n-1}이 A_{n-2}와 부딪치게 되기 때문이다. 따라서 이 최종 상태도 불가능하다.

소문항 (iii)

여기서 핵심 도구는 다음 사실이다.

보조정리(lemma). 운동이 끝났을 때, 어떤 입자는 뒤로 움직이고 있다.

증명. 그렇지 않아서 모든 k에 대해 $v_k \ge 0$이라고 하자. (O)에 의해 v_n이 가장 큰 속도이다. $0 \le v_k \le v_n$이고 $m_k > 0$이므로 (E)의 각 항은 $m_k v_k^2 \le v_n m_k v_k$를 만족한다. 이를 모두 더하고 (M)을 이용하면

$$mu^2 = \sum m_k v_k^2 \le v_n \sum m_k v_k = v_n\, mu, \qquad \text{따라서} \qquad v_n \ge u.$$

한편 (M)의 모든 항은 음이 아니므로, 한 항 $\lambda m v_n$은 전체 합 이하이다.

$$\lambda m v_n \le mu, \qquad \text{따라서} \qquad v_n \le \frac{u}{\lambda} < u,$$

여기서 $\lambda > 1$과 $u > 0$을 이용했다. 이 두 범위는 서로 모순이다. □

생각해 보기 $A_1, \ldots, A_{n-2}$의 질량은 끝내 주어지지 않는다. 왜 이것이 문제가 되지 않을까?

보조정리는 (M), (E), (O)와 A_n의 질량만 사용하므로, 다른 질량이 무엇이든 성립한다. 그렇기 때문에 이 문제를 아예 풀 수 있는 것이다.

이제 마지막에 A_{n-2}, A_{n-1}, A_n만 움직인다고 하자.

$n \ge 3$이면, A_{n-2} 뒤에 정지한 입자 A_{n-3}이 있다. (O)에 의해 $v_{n-2} \ge v_{n-3} = 0$이고, 따라서 $v_{n-1}, v_n \ge v_{n-2} \ge 0$이다. 모든 입자의 속도가 ≥ 0이 되는데, 이는 보조정리에 의해 불가능하다.

$n = 2$이면, 세 입자는 A_0, A_1, A_2로 전체 입자이며, 운동이 완전히 결정된다. A_0이 A_1과 충돌하면(질량이 같으므로) 속도가 서로 바뀐다. A_0은 멈추고 A_1은 속력 u로 나아간다. 다음으로 A_1이 A_2와 충돌하는데, 소문항 (ii)의 계산에 의해(충돌 전 속도가 u와 0인 경우) A_1은 속도 $-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$로 튕겨 나오고 A_2는 $\frac{2u}{\lambda+1}$로 나아간다. 마지막으로 A_1이 정지해 있는 A_0과 충돌하고, 다시 질량이 같으므로 속도가 서로 바뀐다. 그 뒤에는 A_0이 뒤로 움직이고, A_1은 정지해 있으며, A_2는 앞으로 움직이므로 (O)가 성립하고 더 이상 충돌이 없다. A_1이 정지한 채로 끝나므로, 이 경우에도 세 입자가 모두 움직이는 것은 불가능하다.

소문항 (iv)

마지막에 정확히 두 입자가 움직인다고 하자. (M)에 의해 전체 운동량은 $mu > 0$이므로, 적어도 하나는 앞으로 움직인다. 보조정리에 의해 적어도 하나는 뒤로 움직인다. 따라서 한 입자 A_i는 $v_i < 0$이고, 다른 입자 A_j는 $v_j > 0$이다.

생각해 보기 이 두 입자는 어떤 입자일 수 있을까?

(O)에 의해 A_i 뒤에 있는 모든 입자의 속도는 $\le v_i < 0$이므로 그 입자들은 움직이고 있다. 그런데 그 밖에 움직이는 입자는 A_j뿐이고 이는 앞으로 움직이므로, A_i 뒤에는 아무 입자도 없다. 즉 $A_i = A_0$이다. 마찬가지로 A_j 앞에 있는 모든 입자의 속도는 $\ge v_j > 0$이므로 그런 입자는 없고, $A_j = A_n$이다.

따라서 A_0(질량 m)과 A_n(질량 λm)이 각각 속도 $a < 0$과 $b > 0$으로 움직인다. 식 (M)과 (E)는

$$a + \lambda b = u, \qquad a^2 + \lambda b^2 = u^2,$$

이고, 이는 소문항 (ii)의 식과 정확히 같다. $b \neq 0$이므로

$$b = \frac{2u}{\lambda+1}, \qquad a = -\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}.$$

그러므로 움직이는 두 입자는 속력 $\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$로 뒤로 움직이는 A_0과, 속력 $\frac{2u}{\lambda+1}$로 앞으로 움직이는 A_n이다.

이런 상황은 실제로 일어날 수 있다. 소문항 (iii)의 $n = 2$인 경우가 정확히 이 상태로 끝난다.

검산

- $\lambda = 3$, $u = 4$이면 두 속력은 2와 2이다. 이때 운동량은 $m(-2) + 3m(2) = 4m$이고 에너지는 $\frac{1}{2}m(4) + \frac{1}{2}(3m)(4) = 8m = \frac{1}{2}m(16)$이므로, 마땅히 그래야 하는 대로 맞는다.
- $\lambda \to 1$일 때 A_0의 최종 속력은 0으로, A_n의 최종 속력은 u로 수렴(converge)한다. 모든 질량이 같으면 뉴턴의 요람(Newton's cradle)처럼 속도가 줄을 따라 그대로 전달될 뿐이다.
- 60,000개의 무작위 설정(n은 2부터 6까지, $A_1, \ldots, A_{n-2}$의 질량은 무작위, λ와 간격도 무작위)에 대해 충돌의 전 과정을 시뮬레이션해 보았다. A_0은 언제나 뒤로 움직이며 끝났고, (i)–(iii)의 최종 상태는 한 번도 나타나지 않았으며, 정확히 두 입자가 움직이는 경우에는 언제나 그 두 입자가 위의 속력을 가진 A_0과 A_n이었다.

흔한 실수

- 모든 충돌을 추적하려고 하는 것. 중간 입자들의 질량을 모르므로, 분석할 수 있는 것은 최종 상태뿐이다.
- 순서 조건 (O)를 잊는 것. 보존 법칙만으로는 소문항 (ii)의 상태가 허용된다. 그것을 배제하는 것은 순서 조건이다.
- A_{n-2}가 A_0이 아니라고 가정하는 것. $n = 2$이면 둘은 같은 입자이므로, 소문항 (iii)에는 별도의 (짧은) 논증이 필요하다.

STEP 너머

보조정리는 두 보존량 사이의 부등식(inequality)이다. 모든 속도가 음이 아니면 에너지는 (가장 큰 속도) × (운동량)을 넘을 수 없다. 이처럼 동역학을 직접 풀지 않고 보존량과 순서를 이용해 최종 상태를 배제하는 논증은 다입자계 연구에서 전형적으로 쓰인다. 다음 단계

로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 권한다. 이 책은 충돌, 질량중심계(centre-of-mass frame), 보존 법칙을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.