풀이

STEP I 2006, 문제 10

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 2006, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q10

핵심 아이디어

궤적(trajectory)은 포물선이고 지붕은 직선이므로, "살짝 닿는다"는 것은 그 직선이 접선(tangent)이라는 뜻이다. 즉 한 식을 다른 식에 대입하면 중근(repeated root)을 갖는 x에 대한 이차방정식(quadratic)이 나온다. 부호 문제는 그 중근이 어디에 있는지를 따져 보면 해결된다. 마지막 부분에서는 두 입자가 P가 지붕에 닿는 지점에서만 만날 수 있으므로, Q는 정확히 P가 도착하는 순간에 그 지점에 도착해야 한다. 그 시각의 수평 위치를 비교하면 결과를 얻는다.

풀이

궤적

P를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자(particle)로 모형화한다. 초기 속도의 수평 성분과 수직 성분은 모두 $V\cos 45^\circ = V/\sqrt{2}$이므로, 시각 t에서

$$x = \frac{Vt}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{Vt}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = \sqrt{2}\,x/V$를 소거하면 $\frac{1}{2}gt^2 = gx^2/V^2$이므로, 궤적은 다음과 같다.

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

지붕에 닿기

P는 $x - gx^2/V^2 = x\tan\alpha + b$인 곳, 즉 다음을 만족하는 곳에서 지붕과 만난다.

$$\frac{g}{V^2}\,x^2 + (\tan\alpha - 1)\,x + b = 0. \qquad (*)$$

(가로지르는 것이 아니라) 닿는다는 것은 $(*)$가 중근을 갖는다는 뜻이므로, 판별식(discriminant)이 0이다.

$$(\tan\alpha - 1)^2 = \frac{4gb}{V^2} \quad\Longrightarrow\quad V(\tan\alpha - 1) = \pm 2\sqrt{bg}.$$

생각해 보기 두 부호 모두 판별식 조건을 만족한다. 무엇이 둘을 구별하는가?

$(*)$의 중근은

$$x_0 = -\frac{(\tan\alpha - 1)V^2}{2g} = \frac{(1 - \tan\alpha)V^2}{2g}.$$

입자는 x가 증가하는 방향으로 움직이므로($x = Vt/\sqrt{2}$이기 때문이다), $x_0 > 0$인 곳에서만 지붕에 닿을 수 있다. 따라서 $\tan\alpha - 1 < 0$이어야 하고, $V > 0$이므로 좌변 $V(\tan\alpha - 1)$은 음수이다. 그러므로

$$V(-1 + \tan\alpha) = -2\sqrt{bg},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (양의 근을 택하면 접점이 $x_0 < 0$, 즉 포물선을 뒤쪽으로 연장한 부분에 있게 되는데, P는 그곳을 결코 지나지 않는다.) 기하학적으로 보면, 지붕은 처음 운동 방향보다 덜 가팔라야 한다. 즉 $\alpha < 45^\circ$이다. 그렇지 않으면 지붕은 직선 $y = x$보다 위에 있고, 포물선은 $x > 0$에서 그 직선보다 아래에 있다.

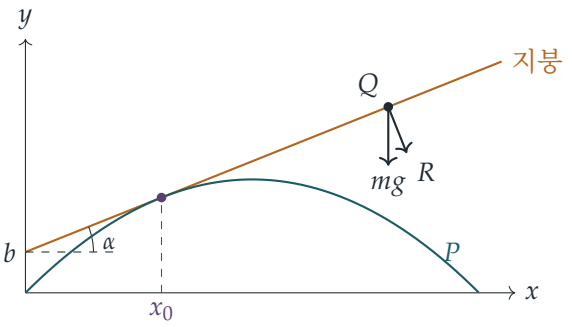
닿는 시각

$x = Vt/\sqrt{2}$이므로, 닿는 시각은

$$T = \frac{\sqrt{2}\,x_0}{V} = \frac{\sqrt{2}\,(1 - \tan\alpha)V}{2g} = \frac{V(1 - \tan\alpha)}{\sqrt{2}\,g}.$$

레일 위의 입자

Q를 직선 $y = x\tan\alpha + b$를 따라 놓인 매끄러운 레일(smooth rail) 위의 입자로 모형화한다. 이 입자는 $(0, b)$에서 레일을 따라 x가 증가하는 방향으로 발사된다(x가 항상 양수인 P에 도달하려면 반드시 그래야 한다). Q에 작용하는 힘은 무게 mg와, 레일에 수직인 레일의 수직항력(normal reaction) R이다. 그림은 이 힘들과 함께, $x = x_0$에서 지붕에 닿는 P의 경로를 보여 준다.



마찰이 없으므로, 레일을 따라 경사면 위쪽 방향으로 힘을 분해하면

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha,$$

이다. 여기서 s는 $(0, b)$에서부터 레일을 따라 잰 Q의 거리이다. $t = 0$에서 $s = 0$이고 $\dot{s} = U$이므로

$$s = Ut - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha, \qquad x_Q = s\cos\alpha.$$

P는 접점을 제외하면 결코 지붕 위에 있지 않고, Q는 항상 지붕 위에 있으므로, 두 입자는 시각 T에 Q가 그 지점에 있을 때에만 닿을 수 있다. 이때 두 입자 모두 지붕 직선 위에 있으므로, 시각 T에서 두 입자의 x좌표가 같기만 하면 충분하다.

$$\left(UT - \tfrac{1}{2}gT^2\sin\alpha\right)\cos\alpha = \frac{VT}{\sqrt{2}}.$$

$T > 0$으로 나누고 $gT = V(1 - \tan\alpha)/\sqrt{2}$를 대입하면

$$U\cos\alpha = \frac{V}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{V(1-\tan\alpha)}{\sqrt{2}}.$$

양변에 $2\sqrt{2}$를 곱하고 $\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha = \sin^2\alpha$를 이용하면

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\,U\cos\alpha &= 2V + V\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\tan\alpha) \\ &= V\left(2 + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\right), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 단위: $V(1-\tan\alpha)/g$는 속력을 가속도로 나눈 것이므로 시간이다. 또 $\sqrt{bg}$는 속력이고, $V(\tan\alpha - 1)$도 속력이다.
- 극한의 경우 $\alpha \to 0$ (평평한 지붕): $b = V^2/(4g)$는 익숙한 최고 높이 $(V\sin 45^\circ)^2/(2g)$이고, 이 높이에 도달하는 시각은 $T = V/(\sqrt{2}g)$이다. 또 Q는 레일 방향으로 아무 힘도 받

지 않으므로 P의 수평 속력과 같아야 한다. 즉 $U = V/\sqrt{2}$이다. 공식은 정확히 이 값을 준다.

- 수치적으로, $g = 9.8$, $V = 10$, $\alpha = 0.3$ rad일 때 접점은 $x_0 \approx 3.524$이다. 임의의 V와 $\alpha < \pi/4$에 대해, 유도한 U로 Q를 레일을 따라 단계적으로 움직여 보면, 시각 T에서 그 입자는 10^{-6} 이내의 오차로 P의 위치에 놓이며, 다른 모든 시각에서 P는 지붕 아래에 머문다.

흔한 실수

- Q의 가속도를 $-g$나 $-g\cos\alpha$로 놓는 것: 레일 방향으로 작용하는 것은 중력의 레일 방향 성분 $g\sin\alpha$뿐이다.
- U를 수평 속력으로 취급하는 것: U는 레일을 따라 잰 속력이므로, Q의 수평 변위는 $s\cos\alpha$이다.
- 음의 근을 택하는 이유를 "속력은 양수이다"라고만 설명하는 것. 이를 결정하는 것은 x_0의 부호(동치로 $\tan\alpha < 1$)이다.

STEP 너머

접할 조건은 더 일반적인 아이디어의 특수한 경우이다. 곡선족이 도달할 수 있는 영역의 경계는 그 곡선들의 **포락선**(envelope)이며, 이를 구하는 것은 결국 이차방정식이 언제 중근을 갖는지 묻는 것과 같다. 일정한 속력으로 모든 방향으로 발사한 포물체의 경우, 포락선은 "안전 포물선(parabola of safety)"이다. Q의 운동은 가장 단순한 구속 운동(constrained motion)이며, 대학 1학년 과정에서는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 구속 조건을 체계적으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 구속 운동을 모두 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.