풀이

STEP III 2005, 문제 9

역학 • 충돌과 반발계수

STEP III 2005, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

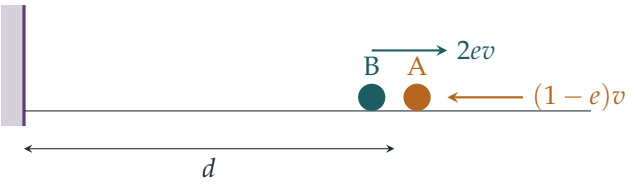
step.maths.org/questions/05-s3-q9

핵심 아이디어

질량이 이상해 보이지만, 첫 번째 충돌(collision)에서 아주 깔끔한 답이 나오도록 골라 둔 값이다. 두 번째 충돌까지 구했으면, 그 직전의 속도를 첫 번째 충돌 직전의 속도와 비교해 보자. 두 속도는 같은 꼴이고, 다만 각각 e가 곱해져 있을 뿐이다. 충돌 법칙은 속도에 대해 선형(linear)이므로, 그다음부터는 전체 과정이 더 작은 규모로 되풀이된다. 이것으로 이후의 모든 충돌이 한꺼번에 해결된다.

풀이

A와 B를 매끄러운 수평선 위의 입자(particle)로 모형화하고, 각 충돌마다 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(experimental law)을 적용한다. **벽을 향하는** 방향을 양의 방향으로 잡고, 거리는 벽에서부터 잰다.



(그림은 첫 번째 충돌 직전의 순간을 나타내며, 두 입자를 약간 떨어뜨려 그렸다.)

첫 번째 충돌

충돌 후 A와 B의 (벽을 향하는) 속도(velocity)를 각각 v_A, v_B라 하자. 충돌 전 A의 속도는 $(1-e)v$이고 B의 속도는 $-2ev$이다.

운동량 보존(conservation of momentum)에 의해

$$\begin{aligned} 4em\,v_A + (1-e)^2 m\,v_B &= 4em(1-e)v - (1-e)^2 m \cdot 2ev \\ &= 2e(1-e)v[2-(1-e)]m = 2e(1-e)(1+e)v\,m. \end{aligned}$$

접근 속력(speed of approach)은 $(1-e)v + 2ev = (1+e)v$이므로, 뉴턴의 법칙에 의해

$$v_B - v_A = e(1+e)v.$$

$v_B = v_A + e(1+e)v$를 운동량 방정식에 대입하고 m으로 나누면

$$[4e + (1-e)^2]v_A = 2e(1-e)(1+e)v - (1-e)^2 e(1+e)v = e(1-e)(1+e)v[2-(1-e)].$$

$4e + (1-e)^2 = (1+e)^2$이므로 우변은 $e(1-e)(1+e)^2 v$이고, 따라서

$$v_A = e(1-e)v, \qquad v_B = e(1-e)v + e(1+e)v = 2ev.$$

둘 다 양수이다. 즉 충돌 후 **A는 속력 $e(1-e)v$로 벽을 향해 움직이고, B는 속력 $2ev$로 벽을 향해 움직인다**.

두 번째 충돌

B가 더 빠르므로 A보다 앞서 나가 시간 $t_1 = d/(2ev)$ 후에 벽에 도달한다. 그동안 A는 $e(1-e)v \cdot \frac{d}{2ev} = \frac{1}{2}(1-e)d$만큼 움직이므로, A는 벽으로부터 거리

$$d - \tfrac{1}{2}(1-e)d = \tfrac{1}{2}(1+e)d$$

인 곳에 있다. B는 속력 $e \cdot 2ev = 2e^2 v$로 튕겨 나와 이제 벽에서 멀어지는 방향으로 움직이고, A는 여전히 속력 $e(1-e)v$로 벽을 향해 움직인다. 두 입자는 서로 가까워지고 있으며, 가까워지는 속력은 $e(1-e)v + 2e^2 v = e(1+e)v > 0$이므로 반드시 다시 만난다(B가 둘 사이에 있으므로 A가 벽에 닿기 전에 만난다). 여기에 걸리는 시간은

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2}(1+e)d}{e(1+e)v} = \frac{d}{2ev},$$

이고, 그동안 B는 벽에서부터 $2e^2 v \cdot \frac{d}{2ev} = ed$만큼 움직인다. 따라서 문제에서 요구한 대로 **두 번째 충돌은 벽으로부터 거리 de인 곳에서 일어난다**.

이후의 충돌

생각해 보기 모든 계산을 다시 하지 않고, 충돌이 더 일어난다는 것을 어떻게 이끌어 낼 수 있을까?

두 번째 충돌 직전의 상태를 보자. A는 속력 $e(1-e)v$로 벽을 향해 움직이고, B는 속력 $2e^2v = 2e(ev)$로 벽에서 멀어진다. 이것은 처음 상태에서 v를 ev로, d를 de로 바꾼 것과 정확히 같다(질량과 e는 그대로이다). 위에서 한 모든 논의는 임의의 $v > 0, d > 0$에 대해 성립하므로, (v, d) 대신 (ev, de)를 넣어 같은 논증을 적용할 수 있다. 그러면 세 번째 충돌이 거리 $(de)e = de^2$인 곳에서 일어나고, 그 직전의 상태는 처음 상태에서 (e^2v, de^2)를 넣은 것이 된다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대해 $(n+1)$번째 충돌이 일어나므로, 충돌은 끝없이 계속된다.

n번째 충돌 직전의 상태는 처음 상태에서 v와 d를 각각 $e^{n-1}v$와 de^{n-1}로 바꾼 것이므로

$$n\text{번째 충돌은 벽으로부터 거리} de^{n-1}\text{인 곳에서 일어난다.}$$

두 번째 부분에서 한 충돌에서 다음 충돌까지 걸리는 시간은 $t_1 + t_2 = d/(ev)$이었다. n번째 충돌에서 시작하면 이 값은

$$\frac{de^{n-1}}{e \cdot e^{n-1}v} = \frac{d}{ev},$$

가 되어 n에 의존하지 않는다. 따라서 연속한 충돌 사이의 시간 간격은 모두 $d/(ev)$로 같다. 한 주기마다 거리와 속력이 모두 e배로 줄어들고, 이 두 효과가 시간에서는 서로 상쇄된다.

검산

- 첫 번째 충돌에서의 운동량: $e = \frac{1}{2}$, $m = v = 1$이면 질량은 2와 $\frac{1}{4}$이다. 충돌 전에는 $2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$이고, 충돌 후에는 $2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$이다. 상대 속력은 $\frac{3}{2}$에서 $\frac{3}{4}$로, e배가 된다.
- e, v, d, m을 무작위로 200가지 골라 각각 충돌 여덟 번씩 운동을 (분수로) 정확히 시뮬레이션했다. 모든 충돌이 de^{n-1}에서 일어났고 간격은 모두 $d/(ev)$였다. $e = \frac{1}{2}$, $v = d = 1$이면 충돌은 시각 $0, 2, 4, 6$에, 거리 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$에서 일어난다.

흔한 실수

- 부호를 혼동하는 것: B는 처음에 벽에서 **멀어지는** 방향으로 움직이므로, 우리의 규약에서 처음 속도는 음수이다.
- 벽과의 충돌에도 반발 계수 e가 적용된다는 것을 잊는 것: B는 $2ev$가 아니라 속력 $2e^2v$로 벽을 떠난다.
- 규모가 바뀌는 구조(scaling)를 알아차리지 못하고 두 번째 충돌을 무작정 다시 계산하는 것: 그렇게 해도 되지만 훨씬 길고, 규칙성을 놓치기 쉽다.

STEP 너머

여기서의 추론은 선형성과 **자기 유사성**(*self-similarity*)을 이용한다. 모든 속도에 같은 상수를 곱해도 충돌의 방정식은 변하지 않으므로, 규모만 다를 뿐 자기 자신을 재현하는 상태는 끝없이 되풀이된다. 무한히 많이 튀어 오르는 공의 분석, 그리고 더 일반적으로 차원 해석(dimensional analysis)의 바탕에도 같은 생각이 깔려 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 운동량을 이런 식으로 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.