풀이

STEP III 2005, 문제 8

순수수학 • 복소수와 원

> **STEP III 2005, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q8

핵심 아이디어

아르강 평면(Argand diagram)의 모든 길이는 $|z|^2 = zz^*$를 이용해 대수식으로 바꿀 수 있다. 첫 번째 항등식을 얻고 나면 직각은 피타고라스(Pythagoras) 정리가 되고, 접선(tangent)은 접선과 반지름(radius) 사이의 직각이 된다. 따라서 "OA가 원에 접한다"는 조건은 하나의 방정식으로 바뀌고, 이 방정식이 반지름의 제곱을 $cc^* - aa^*$로 정해 준다. 그 다음에는 "P가 원 위에 있다"와 "P'이 원 위에 있다"가 모두 같은 방정식으로 귀결된다.

풀이

항등식과 직각

$|z|^2 = zz^*$이고 켤레(conjugation)는 뺄셈을 보존하므로

$$\begin{aligned} |a-c|^2 &= (a-c)(a-c)^* = (a-c)(a^*-c^*) \\ &= aa^* + cc^* - ac^* - ca^*, \end{aligned}$$

이 되어 요구된 식이 성립한다.

삼각형 OAC의 변의 길이는 $OA = |a|$, $OC = |c|$, $AC = |a-c|$이고, a, c가 0이 아니고 서로 다르므로 모두 0이 아니다. 피타고라스 정리와 그 역(converse)에 의해, A에서의 각이 직각일 필요충분조건(if and only if)은 $OC^2 = OA^2 + AC^2$, 즉

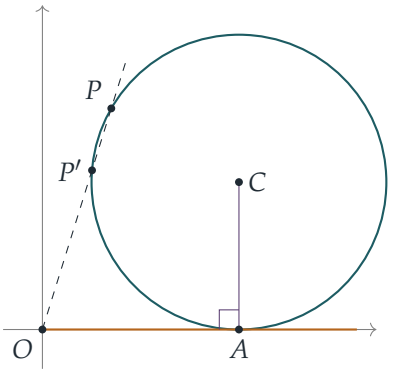
$$cc^* = aa^* + (aa^* + cc^* - ac^* - ca^*) \iff 2aa^* = ac^* + ca^*.$$

이다. 여기서 모든 단계는 거꾸로도 성립하므로 "필요충분조건"이 성립한다.

(피타고라스 정리의 역은 퇴화된 "삼각형"의 경우도 배제해 준다. O, A, C가 한 직선 위에

있다면 세 길이 중 하나가 나머지 둘의 합과 같아야 하는데, 세 길이가 모두 양수일 때 이는 $OC^2 = OA^2 + AC^2$와 동시에 일어날 수 없다.)

접하는 원



접선은 접점에서 반지름과 수직이다. 따라서 OA가 A에서 접한다는 것은 각 OAC가 직각이라는 뜻이고, 앞부분에 의해

$$2aa^* = ac^* + ca^*. \qquad (*)$$

이다. $(*)$를 이용하면 반지름 r은 $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - (ac^* + ca^*) = cc^* - aa^*$를 만족한다. (이것은 다시 피타고라스 정리 $r^2 = OC^2 - OA^2$일 뿐이다.)

$k = bb^* > 0, s = abc^* + a^*b^*c$라 두자. 그러면

$$|ab-c|^2 = (ab-c)(a^*b^* - c^*) = aa^*k - s + cc^*,$$
$$\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = \left(\frac{a}{b^*} - c\right)\left(\frac{a^*}{b} - c^*\right) = \frac{aa^*}{k} - \frac{ac^*}{b^*} - \frac{a^*c}{b} + cc^*.$$

이다. 두 번째 식에 $k = bb^*$를 곱하면

$$k\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = aa^* - s + k\,cc^*. \qquad (**)$$

를 얻는다.

P가 원 위에 있을 조건. $|ab-c|^2 = cc^* - aa^*$가 성립할 필요충분조건은

$$aa^*k - s + cc^* = cc^* - aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

이다.

P'이 원 위에 있을 조건. $|a/b^* - c|^2 = cc^* - aa^*$가 성립할 필요충분조건은 ($k \neq 0$을 곱하고 $(**)$를 이용하면)

$$aa^* - s + k\,cc^* = k\,cc^* - k\,aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

이다. 두 조건이 똑같으므로, P가 원 위에 있을 필요충분조건은 P'이 원 위에 있는 것이다.

역

이제 접한다는 가정을 버리자. 원의 중심이 C이고 원이 A를 지난다고 하면 $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$이다. 또 $k = bb^* \neq 1$일 때 ab와 a/b^*가 모두 이 원 위에 있다고 하자. 같은 전개식을 쓰면

$$\begin{aligned} aa^*k - s + cc^* &= r^2, \\ aa^* - s + k\,cc^* &= kr^2 \qquad ((**)\text{에서}). \end{aligned}$$

이다. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 s가 소거된다.

$$(k-1)\,aa^* - (k-1)\,cc^* = (1-k)\,r^2.$$

? 생각해 보기 문제에서 왜 굳이 $bb^* \neq 1$을 요구할까?

$bb^* = 1$이면 $b^* = 1/b$이므로 $a/b^* = ab$가 되어 두 점이 일치한다. 그러면 "두 점이 모두 원 위에 있다"는 것은 하나의 조건일 뿐이고, 이것만으로는 당연히 접한다는 결론이 나오지 않는다. 우리의 계산에서는 바로 $k-1 \neq 0$으로 나누는 단계가 이에 해당한다.

$$r^2 = cc^* - aa^*.$$

이것을 $r^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$와 비교하면 $2aa^* = ac^* + ca^*$를 얻는다. 앞부분에 의해 각 OAC는 직각이다. 따라서 OA는 원 위의 점 A에서 반지름 CA와 수직이고, 이는 OA가 원의 접선이라는 뜻이다.

검산

- 이 결과 뒤에는 깔끔한 기하학적 이유가 있다. $\dfrac{a}{b^*} = \dfrac{ab}{bb^*}$이므로 점 P'은 P를 양의 실수 $1/|b|^2$배 한 것이다. 따라서 O, P, P'은 한 직선 위에 있고 $OP \cdot OP' = |a|^2 = OA^2$인데, 이것이 바로 접선–할선 정리(tangent–secant theorem)이다(그림 참고).
- 수치로 확인해 보자. $a = 2$, $c = 2 + 1.5\mathrm{i}$로 두고(따라서 $r^2 = 2.25 = |c|^2 - |a|^2$), 원 위의 점 $P = 0.701 + 2.25\mathrm{i}$를 잡는다. 그러면 $b = P/2$이고 $P' = a/b^* \approx 0.505 + 1.620\mathrm{i}$이며, $|P' - c|^2 \approx 2.250$이다.
- 컴퓨터로 임의의 a, b, c에 대해 항등식과 접하는 경우를 확인했다. 또 $|b| \neq 1$인 접하지 않는 임의의 원 1000개를 확인했는데, 모든 경우에 P가 원 위에 있으면 P'은 원 위에 있지 않았다.

흔한 실수

- $(a-c)^* = a^* - c^*$는 올바르게 써 놓고 $|a-c|^2$을 $(a-c)^2$으로 전개하는 실수. 절댓값(modulus)의 제곱에는 켤레가 필요하다.
- 역을 증명할 때 처음부터 접한다고(따라서 $r^2 = cc^* - aa^*$라고) 가정하는 실수. 그것이 바로 증명해야 할 내용이다. $r = |a-c|$에서만 출발해야 한다.
- $1 - bb^*$가 왜 0이 아닌지 말하지 않고 그것으로 나누는 실수.

STEP 너머

$|a|^2/(ab)^* = aa^*/(a^*b^*) = a/b^*$이므로 점 P'은 사상 $z \mapsto |a|^2/z^*$에 의한 P의 상이다. 이 사상은 원 $|z| = |a|$에 대한 **반전**(*inversion*)이다. 즉 각 점을 O에서 나가는 같은 반직선 위에서 거리가 $|a|^2/OP$인 점으로 보낸다. 이 문제는 반전의 원과 직교하는(orthogonal) 원이 자기 자신으로 옮겨진다는 것을 보여 준다. 반전과 반전이 생성하는 뫼비우스 변환(Möbius transformations)은 대학 1학년 복소해석(complex analysis)과 기하학의 핵심 주제이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)에는 이 주제를 한 장에 걸쳐 다룬 아름다운 설명이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.