풀이

# STEP III 2005, 문제 7

순수수학 • 치환적분

**STEP III 2005, 7번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q7

## 핵심 아이디어

처음 결과가 말하는 것은, 피적분함수(integrand) 밖에 $\frac{1}{x}$이라는 인수가 따로 하나 있기만 하면 피적분함수 안에 숨어 있는 $x^m$을 하나의 새 변수 $u = x^m$으로 다룰 수 있다는 것이다. 따라서 각 적분마다 분모에서 $x$를 인수로 묶어 내고, 남은 거듭제곱 $x^m$과 함수 f가 무엇인지 읽어 낸 다음, 훨씬 쉬운 $u$에 대한 적분을 대신 계산하면 된다.

## 풀이

### 일반적인 결과

$\mathrm{F}'(u) = \dfrac{1}{u\,\mathrm{f}(u)}$라고 주어져 있다. 연쇄법칙(chain rule)으로 $\mathrm{F}(x^m)$을 미분하면($x > 0$이라 하자. 그래야 임의의 실수 $m$에 대해 $x^m$이 의미를 가진다)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{F}(x^m) = \mathrm{F}'(x^m)\cdot m x^{m-1} = \frac{m x^{m-1}}{x^m\,\mathrm{f}(x^m)} = \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}.$$

따라서 $\mathrm{F}(x^m)$은 $\dfrac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}$의 부정적분(antiderivative)이고, 이것이 바로 구하려던 결과이다.

$$\int \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x^m) + c.$$

같은 말이지만, 이것은 치환 $u = x^m$, $\mathrm{d}u = m x^{m-1}\,\mathrm{d}x$를 거꾸로 읽은 것이다. 아래에서는 $m$으로 나누게 되므로 조건 $m \neq 0$이 중요하다.

실제로는 다음 꼴로 사용한다.

$$\int \frac{1}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\,\mathrm{F}(x^m) + c. \qquad (*)$$

**소문항 (i)**

$x$를 인수로 묶어 내면

$$\frac{1}{x^n - x} = \frac{1}{x\left(x^{n-1} - 1\right)}.$$

이것은 $m = n - 1$, $\mathrm{f}(u) = u - 1$인 $(*)$의 꼴이다. $n \neq 1$이어야 한다. $n = 1$이면 분모 $x^n - x$가 항상 0이 되어 구할 적분이 없다.

이제 $\dfrac{1}{u(u-1)}$의 부정적분 F가 필요하다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{F}(u) = \ln|u-1| - \ln|u| = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right|.$$

$(*)$에 $u = x^{n-1}$을 대입하면

$$\boxed{\int \frac{1}{x^n - x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\ln\left|\frac{x^{n-1}-1}{x^{n-1}}\right| + c, \qquad n \neq 1.}$$

절댓값 기호 덕분에 이 식은 피적분함수가 정의되는 어느 구간에서나 성립한다(예를 들어 $x > 1$뿐 아니라 $0 < x < 1$에서도 성립하고, $n$이 정수이면 $x < 0$에서도 성립한다).

**소문항 (ii)**

여기서는 제곱근 밖으로 $x$를 꺼낼 때 조금 조심해야 한다. 모든 $n$에 대해 $x^n$이 정의되고 $\sqrt{x^2} = x$가 되도록 $x > 0$에서 생각한다. 그러면

$$\sqrt{x^n + x^2} = \sqrt{x^2\left(x^{n-2} + 1\right)} = x\sqrt{1 + x^{n-2}},$$

이므로 피적분함수는

$$\frac{1}{x\sqrt{1 + x^{n-2}}},$$

이고, 이것은 $m = n - 2$, $\mathrm{f}(u) = \sqrt{1+u}$인 $(*)$의 꼴이다.

**생각해 보기** $n = 2$이면 어떻게 되는가?

이때는 $m = 0$이므로 일반적인 결과를 적용할 수 없다. 하지만 이 적분은 직접 쉽게 계산된다. 피적분함수가 $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$이므로

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln x + c \qquad (n = 2).$$

$n \neq 2$이면 $\mathrm{F}(u) = \displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$가 필요하다. 여기서 $u = x^{n-2} > 0$이다. $t = \sqrt{1+u}$로 치환하면 $u = t^2 - 1$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$이고 $t > 1$이다.

$$\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2t}{\left(t^2-1\right)t}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right),$$

$t > 1$이므로 절댓값은 필요 없다. 이 식은 깔끔하게 정리된다. 분자와 분모에 $t-1$을 곱하고 $t^2 - 1 = u$를 이용하면

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{(t-1)^2}{t^2-1} = \frac{\left(\sqrt{1+u}-1\right)^2}{u}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{F}(u) = 2\ln\left(\sqrt{1+u}-1\right) - \ln u.$$

이제 $m = n-2$로 두고 $(*)$에 $u = x^{n-2}$를 대입한다. 항 $-\ln u$는 $-(n-2)\ln x$가 되고, $m = n-2$로 나누면 $-\ln x$가 된다.

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^n + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n-2}\ln\left(\sqrt{1+x^{n-2}}-1\right) - \ln x + c, \qquad n \neq 2,\ x > 0.}$$

같은 답을 $\dfrac{1}{n-2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^{n-2}}-1}{\sqrt{1+x^{n-2}}+1}\right) + c$로 쓸 수도 있으며, 어느 꼴로 써도 좋다.

## 검산

- 답을 다시 미분해 본다. (i)에서 $n = 2$이면 공식은 $\ln|x-1| - \ln|x|$를 주고, 그 도함수는 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2-x}$로 예상대로이다.
- (i)에서 $n = 3$이면 공식은 $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-x} = \frac{1}{2}\ln\frac{32}{27} \approx 0.084950$을 주며, 이는 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 값과 일치한다.
- (ii)에서 $n = 3$이면 공식은 $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x^2}} = \ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3} \approx 0.664135$를 주며, 이 역시 수치적분 결과와 일치한다. 또한 음수와 정수가 아닌 값을 포함한 여러 $n$에 대해 두 공식을 모두 확인하였다.

## 흔한 실수

- 인수 $\frac{1}{m}$을 빠뜨리는 것. 일반적인 결과에는 분자에 $m$이 있지만 우리 피적분함수에는 없으므로 $m$으로 나누어야 한다.
- 아무 설명 없이 $\sqrt{x^2} = x$라고 쓰는 것. 이것은 $x \geq 0$일 때만 참이다. $x < 0$이면 $-x$이다(또는 $|x|$이다).
- $m = 0$이 되는 예외적인 값, 즉 (i)의 $n = 1$과 (ii)의 $n = 2$를 놓치는 것.

## STEP 너머

처음 결과는 치환적분법(substitution rule)을 반대쪽에서 본 것이다. 치환은 연쇄법칙을 거꾸로 적용한 것일 뿐이며, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서도 관련된 함수들에 대

한 조건을 신중하게 갖추어 바로 그렇게 증명한다. (ii)처럼 다항식의 제곱근이 들어 있는 적분은, 도대체 어떤 적분이 초등함수(elementary functions)로 계산될 수 있는가 하는 질문으로 이어진다. 예를 들어 $\int \mathrm{d}x/\sqrt{1+x^4}$는 초등함수로 계산할 수 없다. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)와 치환적분을 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.