풀이

STEP III 2005, 문제 6

순수수학 • 삼차방정식 풀기

STEP III 2005, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q6

핵심 아이디어

항등식 $4\cosh^3 y - 3\cosh y = \cosh 3y$는 x를 알맞은 상수배로 바꾸고 나면 "축약된" 삼차식(depressed cubic) $x^3 - 3bx$와 정확히 같은 꼴이다. 따라서 x^2항이 없는 삼차방정식은 삼배각 공식(triple-angle formula)에 맞춰 풀 수 있고, arcosh의 로그 표현을 이용하면 쌍곡선함수(hyperbolic function)로 얻은 답을 다시 세제곱근으로 바꿀 수 있다. 근 하나를 알고 나면 인수분해하여 나머지 두 근에 대한 이차방정식을 얻고, 1의 세제곱근(cube roots of unity)을 이용하면 이 두 근을 깔끔하게 정리할 수 있다.

풀이

쌍곡선함수로 나타낸 근

$x = 2a\cosh\frac{1}{3}T$로 놓자. 그러면

$$\begin{aligned} x^3 - 3a^2x &= 8a^3\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 6a^3\cosh\tfrac{1}{3}T \\ &= 2a^3(4\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 3\cosh\tfrac{1}{3}T) \\ &= 2a^3\cosh T, \end{aligned}$$

이다. 여기서 주어진 항등식에 $y = \frac{1}{3}T$를 대입하였다. 따라서 $2a\cosh\frac{1}{3}T$는 방정식을 만족하며, 이것이 증명하려던 것이다.

$x^3 - 3bx = 2c$의 근 하나

먼저 $c > 0$이라 하자. $b > 0$이므로 $a = \sqrt{b} > 0$으로 잡을 수 있고, 그러면 $3a^2 = 3b$이다. 이제 $2a^3 \cosh T = 2c$, 즉

$$\cosh T = \frac{c}{b^{3/2}}.$$

가 되기를 원한다. 이를 위해서는 $c/b^{3/2} \geq 1$이어야 하며, 바로 이 지점에서 조건이 쓰인다. $c > 0$일 때 $c^2 \geq b^3$이면 $c \geq b^{3/2}$이기 때문이다. 따라서

$$T = \operatorname{arcosh} \frac{c}{b^{3/2}} = \ln\left(\frac{c}{b^{3/2}} + \sqrt{\frac{c^2}{b^3} - 1} \right) = \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - b^3}}{b^{3/2}}.$$

로 잡을 수 있다. 그러므로

$$e^{T/3} = \frac{(c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}}{b^{1/2}} = \frac{u}{\sqrt{b}}, \qquad e^{-T/3} = \frac{\sqrt{b}}{u},$$

이고, 앞 부분의 결과에 의해 근 하나는

$$2\sqrt{b} \cosh \tfrac{1}{3} T = \sqrt{b} \left(\frac{u}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{u} \right) = u + \frac{b}{u}.$$

이다.

> **생각해 보기** $c < 0$이면 어떻게 될까? 그때는 $c/b^{3/2} \leq -1$이 되어 cosh 값이 그렇게 되는 실수 T는 존재하지 않는다.

x를 $-x$로 바꾸자. 그러면 방정식은 $-c > 0$인 $x^3 - 3bx = -2c$가 되므로, 방금 다룬 경우에 의해 $u' = (-c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}$일 때 근 $u' + b/u'$을 가지며, $-(u' + b/u')$은 원래 방정식의 근이다. 이제

$$u^3 u'^3 = (\sqrt{c^2 - b^3} + c)(\sqrt{c^2 - b^3} - c) = (c^2 - b^3) - c^2 = -b^3,$$

이므로 실수 세제곱근을 취하면 $u' = -b/u$이고 $-(u' + b/u') = u + b/u$이다. 따라서 이 공식은 c의 부호와 관계없이 성립한다. ($b > 0$일 때 $\sqrt{c^2 - b^3} < |c|$이므로 두 경우 모두 $u \neq 0$임에 주의하자.)

나머지 두 근

$r = u + \frac{b}{u}$라 쓰자. r이 근이므로 $x - r$은 인수이고,

$$x^3 - 3bx - 2c = (x - r)(x^2 + rx + q) = x^3 + (q - r^2)x - rq$$

에서 계수를 비교하면 (x^2항은 저절로 소거된다) $q = r^2 - 3b$이어야 한다. 전개하면

$$q = u^2 + 2b + \frac{b^2}{u^2} - 3b = u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b,$$

이므로 나머지 두 근은

$$x^2 + \left(u + \frac{b}{u}\right)x + u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b = 0,$$

을 만족하며, 이것이 보이려던 것이다. (일관성 검사로, 상수항도 일치한다. $rq = u^3 + b^3/u^3$이고, 분모를 유리화하면 $b^3/u^3 = b^3/(c + \sqrt{c^2 - b^3}) = c - \sqrt{c^2 - b^3}$이므로 $rq = 2c$이다.)

이차방정식을 풀기 위해 $v = b/u$라 쓰면 $uv = b$이고 이차방정식은

$$x^2 + (u + v)x + (u^2 - uv + v^2) = 0.$$

이 된다. 이제 $\omega^3 = 1$이고 $1 + \omega + \omega^2 = 0$이다. $x_1 = \omega u + \omega^2 v$와 $x_2 = \omega^2 u + \omega v$를 시험해 보면

$$x_1 + x_2 = (\omega + \omega^2)(u + v) = -(u + v),$$
$$x_1 x_2 = \omega^3 u^2 + \omega^2 uv + \omega^4 uv + \omega^3 v^2 = u^2 + (\omega^2 + \omega)uv + v^2 = u^2 - uv + v^2.$$

이다. 이것들은 이차방정식의 두 근의 합과 곱이므로, 그 근은

$$x = \omega u + \omega^2 \frac{b}{u} \qquad \text{그리고} \qquad x = \omega^2 u + \omega \frac{b}{u}.$$

이다. $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$이고 $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$이므로, 이 근들은 $-\frac{1}{2}(u + \frac{b}{u}) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u - \frac{b}{u})\mathrm{i}$로도 쓸 수 있다.

$x^3 - 6x = 6$ **풀기**

이것은 $b = 2$, $c = 3$인 $x^3 - 3bx = 2c$이고, $c^2 = 9 \geq 8 = b^3 > 0$이므로 위의 결과를 적용할 수 있다. 여기서

$$u = (3 + \sqrt{9 - 8})^{1/3} = 4^{1/3} = 2^{2/3}, \qquad \frac{b}{u} = \frac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3}.$$

이다. 따라서 근은

$$x = 2^{2/3} + 2^{1/3}, \qquad x = -\tfrac{1}{2}(2^{2/3} + 2^{1/3}) \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}(2^{2/3} - 2^{1/3})\mathrm{i},$$

이며, 복소수 근의 쌍은 $\omega\, 2^{2/3} + \omega^2\, 2^{1/3}$과 그 켤레복소수이다.

검산

- 실 근 은 $2^{2/3} + 2^{1/3} \approx 2.847322$이 고, $2.847322^3 - 6(2.847322) \approx 23.083930 - 17.083932 \approx 6.0000$이다.
- (x^2항이 없으므로) 세 근의 합은 0이어야 한다: $(u + v) - (u + v) = 0$. 세 근의 곱은 6이어야 한다: $r(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3 = 4 + 2 = 6$.

- $c^2 = b^3$이면 $u = \sqrt{b} = b/u$이고, 두 복소수 근은 모두 $-\sqrt{b}$가 되어 중근이 된다. 이는 $x^3 - 3bx - 2b^{3/2} = (x - 2\sqrt{b})(x + \sqrt{b})^2$으로 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $\cosh T \geq 1$임을 잊는 것. 쌍곡선함수를 이용한 논법은 $c > 0$일 때에만 바로 적용되며, $c < 0$인 경우에는 $x \to -x$ 치환이 필요하다.
- 복소수 근을 $\omega u + \omega \frac{b}{u}$로 쓰는 것. 두 세제곱근의 곱은 계속 b와 같아야 하므로, ω의 거듭제곱끼리 곱하면 1이 되어야 한다.

STEP 너머

이것은 삼차방정식에 대한 카르다노(Cardano)의 공식이며, u^3이 어떤 이차방정식의 근일 때 $u + b/u$로 나타내는 이 꼴은 16세기에 이 공식이 처음 발견된 방식이기도 하다. $c^2 < b^3$이면 세 근이 모두 실수인데도 제곱근 안이 음수가 되며("환원 불능의 경우(irreducible case)"), 이때는 삼각함수 버전인 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$가 그 역할을 대신한다. 일반적인 오차방정식에 대해서는 왜 이런 종류의 공식이 존재하지 않는지는 갈루아 이론(Galois theory)이 들려주는 이야기이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.