풀이

STEP III 2005, 문제 5

순수수학 • 포물선의 공통접선

> **STEP III 2005, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q5

핵심 아이디어

접선(tangent)을 접점(point of contact)으로 구별하는 대신 기울기(gradient)로 구별한다. 포물선(parabola)은 각 기울기 m마다 접선을 정확히 하나 가지며, 첫 번째 부분에서 그 접선의 y절편(y-intercept)을 구한다. 두 포물선이 기울기 m인 접선을 공유하는 것은 두 절편이 같을 때이고, 또 그때뿐이다. 따라서 공통접선(common tangent)의 개수를 세는 문제는 하나의 방정식의 근(root) m의 개수를 세는 문제가 된다. 이 방정식은 $a_1 \neq a_2$이면 이차방정식(quadratic)이고, $a_1 = a_2$이면 일차방정식이다.

풀이

기울기가 m인 접선

$y = ax^2 + bx + c$의 기울기는 $2ax + b$이다. $a \neq 0$이므로 이 값이 m이 되는 점은 $x_0 = \dfrac{m-b}{2a}$ 하나뿐이고, 이때 $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$이다. 이 점에서의 접선은 $y - y_0 = m(x - x_0)$, 즉 $y - mx = y_0 - mx_0$이다. $m = 2ax_0 + b$를 이용하면

$$\begin{aligned} y_0 - mx_0 &= ax_0^2 + bx_0 + c - (2ax_0 + b)x_0 \\ &= c - ax_0^2 = c - a \cdot \frac{(m-b)^2}{4a^2} = c - \frac{(m-b)^2}{4a}, \end{aligned}$$

이므로 P에서의 접선은 요구한 대로 $y - mx = c - \dfrac{(m-b)^2}{4a}$이다.

공통접선이 존재할 조건

첫 번째 부분에 의해 각 곡선은 기울기가 m인 접선을 정확히 하나 가지며, 그것은 각각

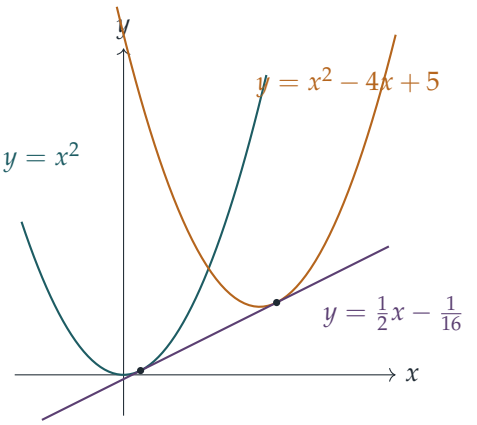
$$y = mx + k_1, \quad k_1 = c_1 - \frac{(m-b_1)^2}{4a_1}, \qquad \text{그리고} \qquad y = mx + k_2, \quad k_2 = c_2 - \frac{(m-b_2)^2}{4a_2}.$$

이다. 기울기가 같은 두 직선은 절편이 같을 때 정확히 일치하므로, 두 곡선이 기울기 m인 공통접선을 가질 필요충분조건은 $k_1 = k_2$이다. 양변에 $4a_1a_2 \neq 0$을 곱하면(이는 등식의 성립 여부를 바꾸지 않는다)

$$\begin{aligned} 4a_1a_2(k_2 - k_1) &= 4a_1a_2(c_2 - c_1) - a_1(m-b_2)^2 + a_2(m-b_1)^2 \\ &= (a_2 - a_1)m^2 + 2(a_1b_2 - a_2b_1)m + 4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2. \end{aligned}$$

따라서 기울기 m인 공통접선이 존재할 필요충분조건은 이 식이 0이 되는 것이며, 이것이 요구한 조건이다. 이 조건의 좌변을 $Q(m)$이라 하자.

$Q(m) = 0$의 각 근 m은 정확히 하나의 공통접선을 주고, 서로 다른 근은 서로 다른 직선을 준다(기울기가 다르기 때문이다). 따라서 **공통접선의 개수는 $Q(m) = 0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.** 또한 어느 곡선도 수직인 접선을 갖지 않으므로 수직인 공통접선은 있을 수 없다는 점에도 주의한다.



$a_1 = a_2$이고 $b_1 \neq b_2$인 두 포물선은 공통접선을 정확히 하나 가진다. 여기서 그 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$a_1 \neq a_2$인 경우

이때 Q는 m에 대한 진짜 이차식이므로, 서로 다른 실근을 정확히 하나 가질 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 0인 것이다. 판별식은

$$\Delta = 4(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)(4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2).$$

이다. c가 없는 항들은 깔끔하게 정리된다.

$$\begin{aligned}&(a_1b_2-a_2b_1)^2-(a_2-a_1)(a_2b_1^2-a_1b_2^2)\\&=(a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2)-(a_2^2b_1^2-a_1a_2b_2^2-a_1a_2b_1^2+a_1^2b_2^2)\\&=a_1a_2(b_1^2-2b_1b_2+b_2^2)=a_1a_2(b_1-b_2)^2.\end{aligned}$$

그러므로

$$\Delta=4a_1a_2\Big[(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)\Big],$$

이고, $a_1a_2\neq 0$이므로 공통접선이 정확히 하나일 필요충분조건은

$$(b_1-b_2)^2=4(a_1-a_2)(c_1-c_2). \qquad (*)$$

이다.

생각해 보기 두 곡선이 **접한다**는 것은 정확히 무슨 뜻이며, 이를 어떻게 방정식으로 바꿀 수 있을까?

두 곡선이 접한다는 것은 한 점에서 만나고 그 점에서 기울기가 같다는 것이다. 두 이차식의 차를

$$d(x)=(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2),$$

라 하자. 두 곡선은 $d(x_0)=0$일 때 x_0에서 만나고, $d'(x_0)=0$일 때 그 점에서 기울기가 같다. 따라서 두 곡선이 접할 필요충분조건은 d가 $d'(x_0)=0$을 만족하는 근 x_0, 즉 중근(repeated root)을 갖는 것이다. $a_1\neq a_2$이므로 d는 이차식이고, 중근을 가질 필요충분조건은 판별식 $(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)$가 0인 것이며, 이것이 바로 조건 $(*)$이다.

따라서 $a_1\neq a_2$일 때, 두 곡선이 공통접선을 정확히 하나 가지는 것은 $(*)$가 성립하는 것과 동치이고, 이는 다시 두 곡선이 접하는 것과 동치이다. (이 경우 하나뿐인 공통접선은 당연히 접점에서의 접선이다.)

$a_1=a_2$인 경우

공통의 값을 a라 하자. Q의 m^2항이 사라지고, $a\neq 0$으로 나누면 조건은

$$2(b_2-b_1)m+4a(c_2-c_1)+(b_1-b_2)(b_1+b_2)=0.$$

이 된다.

- $b_1\neq b_2$이면 이 일차방정식은 근을 정확히 하나

$$m=\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{2a(c_2-c_1)}{b_2-b_1},$$

가지므로, 공통접선이 정확히 하나 존재한다.

- $b_1 = b_2$이면 조건은 $4a(c_2 - c_1) = 0$이 된다. $c_1 \neq c_2$이면 공통접선이 전혀 없다(한 곡선은 다른 곡선을 수직 방향으로 평행이동한 것이므로, 각 기울기의 접선들은 평행하고 서로 다르다). $c_1 = c_2$이면 두 곡선은 같은 곡선이고 모든 접선이 공통이므로 공통접선은 무수히 많다.

따라서 $a_1 = a_2$일 때, 두 곡선이 공통접선을 정확히 하나 가질 필요충분조건은 $b_1 \neq b_2$이다.

검산

$y = x^2$과 $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$의 차는 $2(x - \frac{1}{2})^2$이므로 두 곡선은 $x = \frac{1}{2}$에서 접한다. 이때 $Q(m) = -2m^2 + 4m - 2 = -2(m-1)^2$이고 하나뿐인 근 $m = 1$은 $x = \frac{1}{2}$에서 $y = x^2$의 기울기이다. 그림의 두 곡선 $y = x^2$과 $y = x^2 - 4x + 5$에 대해서는 공식에서 $m = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$를 얻고, 두 접선의 절편은 모두 $-\frac{1}{16}$이 된다. 또한 항등식 $Q(m) = 4a_1a_2(k_2 - k_1)$과 판별식의 정리 과정을 무작위로 뽑은 수천 개의 계수 조합에 대해 정확한 산술로 확인하였다.

흔한 실수

- $Q = 0$이 중근을 가지면 두 곡선이 접한다는 것을 "뜻한다"고 이유 없이 주장하는 것. 실제로는 **다른** 이차식 $d(x)$를 거쳐야 하며, 둘을 이어 주는 것은 판별식 항등식이다.
- $a_1 = a_2$인 경우에 $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$인 부분 경우(같은 곡선이므로 공통접선이 무수히 많음)를 빠뜨리거나, 답을 "$b_1 \neq b_2$ 또는 $c_1 \neq c_2$"라고 쓰는 것.

STEP 너머

곡선을 점들이 아니라 접선들의 모임으로 기술하는 것이 사영기하학(projective geometry)의 **쌍대성**(duality)이라는 아이디어이다. 원뿔곡선(conic)의 접선 $y = mx + k$들은 m과 k 사이의 고유한 이차 관계식을 만족하며, 일반적인 위치에 있는 두 원뿔곡선은 네 점에서 만나는 것과 마찬가지로 공통접선을 네 개 가진다. 축이 수직인 두 포물선의 경우에는 무한원직선(line at infinity)이 두 곡선 모두에 접하면서 네 개 중 두 개를 차지하므로, 보통의 공통접선은 많아야 두 개만 남는다. 이런 종류의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.