풀이

STEP III 2005, 문제 4

순수수학 • 비선형 점화식

> **STEP III 2005, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q4

핵심 아이디어

이 점화식(recurrence)은 선형(linear)이 아니지만, 실제로는 연속한 항들의 비(*ratio*)에 관한 식이다. $u_{n+1} = \rho\, u_n$이라고 쓰면, 점화식은 다음 비가 $k - \rho$라는 것을 말해 준다. 따라서 비는 합이 k인 두 값 사이를 번갈아 오가며, 나머지는 모두 이 사실에서 나온다. 그러면 세 가지 특수한 경우는 이 두 비에 대한 조건이 된다.

풀이

수학적 귀납법(induction)

$r = \frac{b}{a}$라 하자. 점화식을 u_{n+1}로 나누면 (0이 아닐 때)

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = k - \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

을 얻으므로, 연속한 항들의 각 비는 k에서 바로 앞의 비를 뺀 값이다. 첫 번째 비는 $u_2/u_1 = r$이므로, 그다음 비는

$$c = k - \frac{b}{a} = \frac{ka - b}{a}.$$

가 되어야 한다. $b \neq ka$이므로 $c \neq 0$임에 주의하자. 또한 $b \neq 0$이므로 $r \neq 0$이다. 이 두 사실이 함께 모든 항이 0이 아니도록 보장하므로, 0으로 나누는 일은 결코 생기지 않는다.

$P(n)$을 $u_{2n-1} \neq 0$이고 $u_{2n} = r\, u_{2n-1}$이라는 명제라 하자. $u_1 = a \neq 0$이고 $u_2 = b = ra$이므로 $P(1)$은 성립한다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다고 가정하자. 그러면 $u_{2n} = ru_{2n-1} \neq 0$이고, 점화식

에 의해

$$u_{2n+1} = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}(ku_{2n-1} - u_{2n}) = r\,(k-r)\,u_{2n-1} = (k-r)\,u_{2n} = c\,u_{2n},$$

이며, 이것이 요구된 두 번째 관계식이다. 따라서 $u_{2n+1} \neq 0$이고,

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}(ku_{2n} - u_{2n+1}) = c\,(k-c)\,u_{2n} = (k-c)\,u_{2n+1} = r\,u_{2n+1},$$

이다. 여기서 $k - c = r$임을 썼다. 이것이 곧 $P(n+1)$이다. 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$u_{2n} = \frac{b}{a}\,u_{2n-1}, \qquad u_{2n+1} = c\,u_{2n}, \qquad c = k - \frac{b}{a}.$$

이다.

? **생각해 보기** 왜 귀납법의 명제에 "$u_{2n-1} \neq 0$"을 넣었을까?

점화식은 u_n으로 나누므로, 어떤 항도 0이 아니어야만 수열이 의미를 가진다. 0이 아니라는 성질을 귀납법 과정 내내 함께 끌고 가면, 공식을 증명하는 동시에 각 항이 정의된다는 것도 증명된다. 두 조건 $b \neq 0$과 $b \neq ka$가 모두 쓰이는 곳이 바로 여기이다.

닫힌 형태(closed form)

두 단계를 나아가면 c를 곱한 다음 $\frac{b}{a}$를 곱하게 되므로 $u_{2n+1} = \frac{bc}{a}\,u_{2n-1}$이다. 홀수 번째 항들은 첫째항이 a이고 공비(common ratio)가 $\frac{bc}{a}$인 등비수열(geometric progression)을 이루며, 각 짝수 번째 항은 바로 앞의 홀수 번째 항의 $\frac{b}{a}$배이다.

$$u_{2n-1} = a\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-2}}, \qquad u_{2n} = b\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^n c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

소문항 (i)

연속한 항들의 비는 $\frac{b}{a}, c, \frac{b}{a}, c, \ldots$로 번갈아 나타나므로, 수열이 등비수열일 필요충분조건은 $c = \frac{b}{a}$, 즉 $k - \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$이다.

$$ka = 2b.$$

이때 공비는 $\frac{b}{a}$이다. $b \neq 0$일 때 $ka = 2b \neq b$이므로, 이는 $b \neq ka$와 모순되지 않는다.

소문항 (ii)

닫힌 형태로부터 모든 n에 대하여 $u_{n+2} = \frac{bc}{a}\,u_n$이다. 따라서 모든 n에 대하여 $u_{n+2} = u_n$일 필요충분조건은 $\frac{bc}{a} = 1$, 즉 $b(ka - b) = a^2$이다.

$$kab = a^2 + b^2.$$

이때 수열은 $a, b, a, b, \ldots$ 이다. 주기(period)가 정확히 2이기를 (상수수열이 아니기를) 원한다면 $a \neq b$도 필요하다. $a = b$이면 조건은 $k = 2$가 되고, 모든 항이 a와 같다.

소문항 (iii)

마찬가지로 $u_{n+4} = (\frac{bc}{a})^2 u_n$이므로, 모든 n에 대하여 $u_{n+4} = u_n$일 필요충분조건은 $(\frac{bc}{a})^2 = 1$, 즉 $\frac{bc}{a} = \pm 1$이다. 값 $+1$은 주기가 2 (또는 1)인 소문항 (ii)의 경우이다. 주기가 정확히 4이려면 $\frac{bc}{a} = -1$, 즉 $b(ka - b) = -a^2$이어야 한다.

$$kab = b^2 - a^2.$$

이때 수열은 a, b, $-a$, $-b$, a, b, $\ldots$ 이다. $a \neq 0$이므로 $-a \neq a$이고, 따라서 이 수열의 주기는 정말로 4이며 그보다 작지 않다.

(ii)와 (iii) 모두에서 조건 $b \neq ka$는 자동으로 성립한다. 어느 조건에든 $b = ka$를 대입하면 $a^2 = 0$이 되는데, 이는 불가능하기 때문이다.

검산

$a = 1, b = 2$로 시험해 보자. $k = 4$ (소문항 (i))이면 점화식은 $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 을 준다. $k = \frac{5}{2}$ (소문항 (ii))이면 $1, 2, 1, 2, \ldots$ 을 준다. $k = \frac{3}{2}$ (소문항 (iii))이면 $1, 2, -1, -2, 1, 2, \ldots$ 을 준다. 또한 a, b, k를 무작위로 약 2000번 골라 정확한 유리수 연산으로 점화식을 계산해 보았다. 모든 경우가 닫힌 형태와 일치했으며, 수열은 위의 조건이 성립할 때에만 정확히 등비수열, 주기 2인 수열, 주기 4인 수열이 되었다.

흔한 실수

- 점화식이 u_n으로 나누는데도, 왜 어떤 항도 0이 되지 않는지 설명하는 것을 잊는다.
- (iii)의 답으로 $\frac{bc}{a} = \pm 1$을 제시한다. $+1$인 경우는 주기가 2이다.
- (ii)에서 $a = b, k = 2$이면 상수수열이 된다는 것을 알아차리지 못한다.

STEP 너머

치환 $\rho_n = u_{n+1}/u_n$은 이 비선형 점화식을 1계 사상(first-order map) $\rho \mapsto k - \rho$로 바꾼다. 이 사상은 대합(involution)이다. 즉 두 번 적용하면 처음 자리로 돌아오며, 이 때문에 비의 주기가 2가 된다. 변수를 바꾸어 비선형 점화식이나 미분방정식을 더 간단하게 만드는 것은 대학 1학년의 표준적인 기법이며, 사상의 주기 궤도(periodic orbit)에 대한 연구는 이산 동역학계(discrete dynamical systems)의 출발점이다. 이런 성격의 문제를 더 보고 싶다면

Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.