풀이

STEP III 2005, 문제 3

순수수학 • 이차식의 합성

> **STEP III 2005, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q3

핵심 아이디어

최고차항의 계수가 1인 이차식(monic quadratic) 두 개를 합성(composition)하면 최고차항의 계수가 1인 사차식(quartic)이 되는데, 그 계수들은 서로 묶여 있다. 네 개의 매개변수 p, q, r, s가 네 개의 계수 a, b, c, d를 만들어 내야 하지만, p와 s는 그중 두 계수에서 언제나 $2s + p$라는 조합으로만 나타나므로 하나의 관계식이 반드시 성립해야 한다. 두 번째 형태도 사실은 같은 것이 모습만 바꾼 것이다. **바깥쪽** 이차식을 완전제곱식으로 고치면(completing the square) $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$는 (제곱식) $-$ (상수)의 꼴이 된다. 바로 이 꼴 덕분에 마지막 사차방정식을 근의 공식(quadratic formula)만으로 풀 수 있다.

풀이

이차식의 합성

f에서 x 자리에 $\mathrm{g}(x)$를 대입하면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) &= (x^2 + rx + s)^2 + p(x^2 + rx + s) + q \\ &= x^4 + 2rx^3 + (r^2 + 2s + p)x^2 + r(2s + p)x + (s^2 + ps + q).\end{aligned}$$

따라서 모든 x에 대하여 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$a = 2r, \qquad b = r^2 + (2s + p), \qquad c = r(2s + p), \qquad d = s^2 + ps + q.$$

필요성(necessity). 이러한 p, q, r, s가 존재하면 $r = \frac{1}{2}a$이고 $2s + p = b - r^2 = b - \frac{1}{4}a^2$이므로

$$c = \tfrac{1}{2}a(b - \tfrac{1}{4}a^2), \qquad \text{즉} \qquad a^3 - 4ab + 8c = 0.$$

충분성(sufficiency). 역으로 $a^3 - 4ab + 8c = 0$이라 하자. $r = \frac{1}{2}a$로 두고, s는 아무 값으로 나(예를 들어 $s = 0$) 정한 다음 $p = b - \frac{1}{4}a^2 - 2s$, $q = d - s^2 - ps$로 놓는다. 그러면 첫째, 둘째, 넷째 등식은 만든 방법에 의해 성립하고, 셋째 등식은 $c = \frac{1}{2}a(b - \frac{1}{4}a^2)$가 되는데, 이것은 주어진 조건을 정리한 것이다. q는 상수항에만 나타나므로 d에는 아무 제약도 걸리지 않는다는 점에 주목하자.

따라서 구하는 필요충분조건(necessary and sufficient condition)은

$$\boxed{a^3 - 4ab + 8c = 0}$$

이다(d는 임의).

$(x^2 + vx + w)^2 - k$ **꼴**

> **생각해 보기** $\mathrm{g}^2 + p\,\mathrm{g} + q$ 같은 합을 어떻게 하나의 제곱식에서 상수를 뺀 꼴로 다시 쓸 수 있을까?

$\mathrm{g}(x)$를 하나의 변수로 보고 g에 대하여 완전제곱식으로 고치면

$$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) = (\mathrm{g}(x) + \tfrac{1}{2}p)^2 + q - \tfrac{1}{4}p^2 = (x^2 + rx + s + \tfrac{1}{2}p)^2 - (\tfrac{1}{4}p^2 - q).$$

이제 양방향을 모두 증명할 수 있다.

조건이 성립하면, 첫 번째 부분에 의해 사차식이 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$와 같아지도록 하는 p, q, r, s가 존재하고, 위의 식은 그 사차식이

$$v = r, \qquad w = s + \tfrac{1}{2}p, \qquad k = \tfrac{1}{4}p^2 - q.$$

인 $(x^2 + vx + w)^2 - k$와 같음을 보여 준다.

역으로, $(x^2 + vx + w)^2 - k$는 그 자체로 $\mathrm{g}(x) = x^2 + vx + w$, $\mathrm{f}(x) = x^2 - k$인 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$이다(즉 $p = 0, q = -k, r = v, s = w$). 첫 번째 부분의 필요성 논증에 의해 조건 $a^3 - 4ab + 8c = 0$이 성립해야 한다.

이로써 "필요충분조건"의 증명이 끝난다. 실제로 쓰려면 값을 명시적으로 구해 두는 것이 좋다. 전개하면

$$(x^2 + vx + w)^2 - k = x^4 + 2vx^3 + (v^2 + 2w)x^2 + 2vw\,x + (w^2 - k),$$

이므로

$$v = \tfrac{1}{2}a, \qquad w = \tfrac{1}{2}(b - \tfrac{1}{4}a^2) = \tfrac{1}{8}(4b - a^2), \qquad k = w^2 - d,$$

이어야 하고, 이때 x의 계수는 $2vw = \frac{1}{2}a(b - \frac{1}{4}a^2)$이며, 이것은 조건이 성립할 때 정확히 c와 같다.

사차방정식 풀기

여기서 $a=-4$, $b=10$, $c=-12$, $d=4$이고

$$a^3-4ab+8c=-64+160-96=0,$$

이므로 이 방법을 적용할 수 있다. 공식에 의해

$$v=-2, \qquad w=\tfrac{1}{8}(40-16)=3, \qquad k=3^2-4=5,$$

이고, 실제로 $(x^2-2x+3)^2-5=x^4-4x^3+10x^2-12x+4$이다(확인을 위해 한 번 전개해 볼 만하다). 방정식은 다음과 같이 된다.

$$(x^2-2x+3)^2=5 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-2x+3=\sqrt{5} \text{ 또는 } x^2-2x+3=-\sqrt{5}.$$

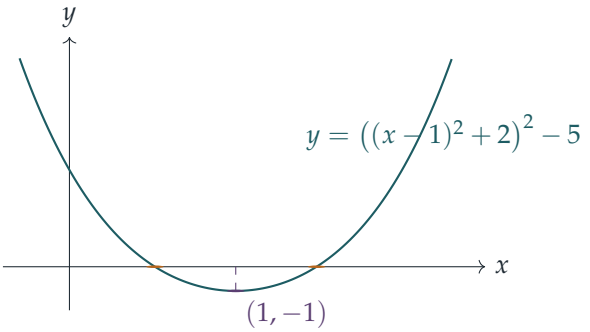
$x^2-2x+3=(x-1)^2+2$로 쓰면

- $(x-1)^2=\sqrt{5}-2$. $\sqrt{5}>2$이므로 우변은 양수이고, 두 실근(real roots) $x=1\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$를 얻는다.
- $(x-1)^2=-2-\sqrt{5}<0$이므로, 켤레 복소수 근(complex pair) $x=1\pm\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{5}}$를 얻는다.

따라서 근은

$$\boxed{x=1\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}, \qquad x=1\pm\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{5}}}$$

이고, 이 가운데 첫 번째 쌍만 실수이다(문제가 실근을 구하라는 뜻이라면 이 두 개가 답이다).



그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고($(x-1)^2$에만 의존하므로), $x=1$에서 최솟값 $2^2-5=-1$을 가지므로 축과 정확히 두 번 만난다.

검산

- 수치적으로 $1 \pm \sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 1.4859, 0.5141$이다. 둘 중 어느 것을 $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$에 대입해도 10^{-14} 이내의 오차로 0이 되며, $1 \pm 2.0582\,\mathrm{i}$도 마찬가지이다.
- 근의 합: 네 근의 합은 $4 = -a$로, 당연히 그래야 한다.
- 직접 합성을 하나 만들어 시험해 보자. 예를 들어 $\mathrm{f}(x) = x^2 + x$, $\mathrm{g}(x) = x^2 + 2x$로 두면 $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$를 얻고, $a^3 - 4ab + 8c = 64 - 80 + 16 = 0$이다.

흔한 실수

- d에 대한 조건을 포함하는 것: 상수항은 언제나 q(또는 k)로 맞출 수 있으므로 d는 자유롭다.
- "필요충분조건"의 한 방향만 증명하는 것: $(x^2 + vx + w)^2 - k$가 그 자체로 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ 꼴이라는 관찰만으로 역을 한 줄에 보일 수 있다.
- 실근을 구한 뒤 멈추고, 다른 인수에서 켤레 복소수 근이 나온다는 것을 알아차리지 못하는 것.

STEP 너머

조건 $a^3 - 4ab + 8c = 0$에는 깔끔한 의미가 있다. $x = y - \frac{1}{4}a$를 대입하면 삼차항이 사라지는데, 이 조건은 그렇게 얻은 **축약된**(depressed) 사차식에 y의 일차항이 없다는 것, 즉 그 식이 y^2에 대한 이차식이라는 것과 정확히 같다. 이것이 사차방정식에 대한 페라리(Ferrari)의 일반 해법의 출발점이며, 더 넓게는 다항식이 언제 합성으로 분해되는가 하는 문제의 출발점으로, 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다. 어떤 다항방정식이 거듭제곱근(radicals)으로 풀리는지 그 배후의 대수학을 살펴보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.