풀이

STEP III 2005, 문제 2

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

STEP III 2005, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q2

핵심 아이디어

이 미분방정식(differential equation)은 변수분리형(separable)이며, 적분하면 로그가 나오고 이를 합치면 주어진 꼴이 된다. 거리에 관한 문제에서는 거리 자체 대신 거리의 **제곱** $D = x^2 + y^2$을 최소화하면 제곱근을 다루지 않아도 된다. 곡선 위에서 y^2은 x의 명시적인 함수이므로 D는 x만의 함수가 되고, 그 도함수는 깔끔하게 인수분해된다. 어떤 정류점(stationary point)이 나타나는지는 c와 a^2의 대소 관계에 따라 달라진다.

풀이

일반해

($y \neq 0$일 때) 변수를 분리하면

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + k,$$

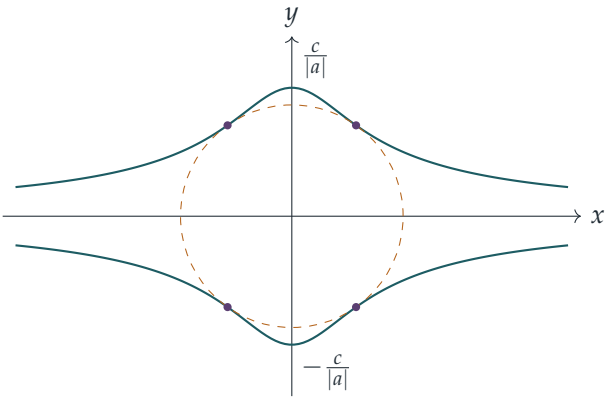
이고, 여기서 k는 상수이다. $a \neq 0$이므로 모든 x에 대하여 $x^2 + a^2 > 0$이고, 따라서 우변의 로그는 어디서나 정의된다. 양변에 2를 곱하고 지수를 취하면

$$y^2 = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{x^2+a^2}, \qquad \text{따라서} \qquad y^2(x^2+a^2) = c^2,$$

이고, 여기서 $c^2 = \mathrm{e}^{2k}$이다. y로 나눌 때 잃어버린 해 $y = 0$은 $c = 0$인 경우이므로, c는 실제로 임의의 상수이다. 명시적으로 쓰면 일반해(general solution)는 $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$이고, c의 부호는 양이든 음이든 상관없다. 곡선의 방정식에는 c^2만 나타나므로 이제부터는 $c > 0$으로 둔다.

곡선 그리기

곡선 $y^2(x^2+a^2)=c^2$은 두 갈래 $y=\pm c/\sqrt{x^2+a^2}$으로 이루어진다. 이 곡선은 두 축에 대하여 모두 대칭이고(x^2과 y^2만 나타나므로), x축과는 결코 만나지 않는다. 위쪽 갈래에서 y는 x^2+a^2이 가장 작을 때 가장 크므로, $x=0$에서 최댓값 $c/|a|$를 갖는다. $|x|\to\infty$일 때 $y\approx\pm c/|x|\to 0$이므로 x축이 점근선(asymptote)이다. 그림은 $a=1$, $c=2$인 경우를 소문항 (ii)에서 구할 원과 함께 나타낸 것이다.



x^2+y^2의 도함수

$D=x^2+y^2$이라 하자. 미분방정식을 쓰고 이어서 $y^2=c^2/(x^2+a^2)$을 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x-\frac{2xy^2}{x^2+a^2}=2x\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right).$$

이 식에는 y^2만 들어 있으므로 두 갈래 모두에서 성립한다. 곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+a^2)^{-2}=-4x(x^2+a^2)^{-3}$ 을 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+2x\cdot\frac{4c^2x}{(x^2+a^2)^3}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+\frac{8c^2x^2}{(x^2+a^2)^3},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

D의 정류점은 $x=0$ 또는 $(x^2+a^2)^2=c^2$인 곳이다. $x^2+a^2>0$이고 $c>0$이므로 두 번째 조건은 $x^2+a^2=c$, 즉 $x^2=c-a^2$을 뜻한다.

소문항 (i)

$0<c<a^2$이라 하자. 모든 x에 대하여 $x^2+a^2\geq a^2>c$이므로 $(x^2+a^2)^2>c^2$이고, $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$의 괄호 안은 항상 양수이다. 따라서 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$는 x와 부호가 같다. 즉 D는 $x<0$에서 감소하고 $x>0$에서 증가한다. 그러므로 D는 $x=0$에서, 그리고 오직 그곳에서만 **전역** 최솟

값(global minimum)을 갖는다. (이와 맞게, 그 점에서 이계도함수는 $2(1-c^2/a^4) > 0$이다.)

$x = 0$에서 $y^2 = c^2/a^2$이므로 가장 가까운 점은

$$\left(0,\, \pm\frac{c}{a}\right),$$

이고, 원점으로부터의 거리는 $c/|a|$이다. 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (ii)

이제 $c > a^2$이라 하자. 정류점은 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{c-a^2}$의 세 개이다.

> **생각해 보기** $x = 0$은 여전히 가장 가까운 점일까?

그렇지 않다. $x = 0$에서 이계도함수는 $2(1-c^2/a^4)$인데, $c > a^2 > 0$에서 $c^2 > a^4$이므로 이 값은 음수이다. 따라서 이제 $x = 0$은 D의 극댓값(local maximum)을 주는 점, 즉 **극대점**이다. $x^2 = c - a^2$에서는 $x^2 + a^2 = c$이므로 괄호 안이 0이 되고

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = \frac{8c^2(c-a^2)}{c^3} = \frac{8(c-a^2)}{c} > 0,$$

이므로 극솟값(local minimum)을 갖는다. 이것이 전역 최솟값임을 보이려면 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$의 부호를 살펴보면 된다. $x > 0$일 때 괄호 안은 $x^2 < c - a^2$이면 음수이고 $x^2 > c - a^2$이면 양수이므로, $x \geq 0$에서 함수 D는 $x = \sqrt{c-a^2}$까지 감소하고 그 뒤로 증가한다. 따라서 $x \geq 0$에서 D는 $x = \sqrt{c-a^2}$일 때 가장 작고, 대칭성에 의해 $x \leq 0$에서는 $x = -\sqrt{c-a^2}$일 때 가장 작다.

이 점들에서 $y^2 = c^2/(x^2+a^2) = c^2/c = c$이다. 그러므로 곡선 위에서 원점에 가장 가까운 점은 다음 네 점

$$\left(\pm\sqrt{c-a^2},\, \pm\sqrt{c}\right)$$

(부호의 네 가지 조합 모두)이고, 원점으로부터의 거리는 $\sqrt{2c-a^2}$이다.

교차 검증으로, $x = 0$에서 거리의 제곱은 c^2/a^2이고

$$\frac{c^2}{a^2} - (2c - a^2) = \frac{(c-a^2)^2}{a^2} > 0,$$

이므로 y축 위의 점들이 실제로 더 멀리 있다.

검산

- $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$을 미분방정식에 다시 대입하면 성립한다: $y' = -cx(x^2+a^2)^{-3/2} = -xy/(x^2+a^2)$.

- $a = 1$, $c = 2$일 때 $x^2 + 4/(x^2+1)$을 일일이 계산해 보면 최솟값 $3 = 2c - a^2$을 $x = \pm 1 = \pm\sqrt{c-a^2}$에서 얻고, 이때 $y^2 = 2 = c$이다. 이것이 그림의 네 점이며, 이곳에서 반지름 $\sqrt{3}$인 점선 원이 곡선에 접한다.
- $c = a^2$에서는 두 답이 일치한다: $\sqrt{c-a^2} = 0$이고 $\sqrt{c} = c/|a| = |a|$이므로 네 점이 합쳐져 $(0, \pm|a|)$가 된다.

흔한 실수

- "$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x = 0$이고 $\mathrm{d}^2D/\mathrm{d}x^2 > 0$"이라는 사실만으로 그 점이 거리가 **가장 짧은** 점이라고 결론짓는 것. 이것은 극소만 보장할 뿐이며, 전역적인 문제는 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$의 부호로 판정해야 한다.
- 아래쪽 갈래를 잊어버려서 소문항 (ii)에서 네 점 대신 두 점만 답하는 것.
- $x^2 + a^2 = \pm c$라고 쓰는 것. $x^2 + a^2 > 0$이므로 음의 경우는 불가능하다.

STEP 너머

$y^2(x^2+a^2) = c^2$이라는 조건 아래에서 x^2+y^2을 최소화하는 것은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 대학에서는 한 변수에 대해 풀지 않고도 이런 문제를 다룰 수 있는 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multipliers)를 배우게 된다. 가장 가까운 점에서는 곡선의 법선(normal)이 반지름 방향을 향하며, 그래서 점선 원이 곡선에 접하는 것이다. c가 a^2을 지나면서 $x = 0$의 단 하나의 최솟값이 두 개로 갈라지는 현상은 **쇠스랑 분기**(pitchfork bifurcation)의 간단한 예이다. 변수분리형 방정식과 그 해곡선에 대해 더 알고 싶다면 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.