풀이

STEP III 2005, 문제 11

역학 • 강체의 평형

> **STEP III 2005, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q11

핵심 아이디어

축(spindle)과 막대들은 고정된 수평축을 중심으로 회전하는 하나의 강체(rigid body)를 이루므로, 각 하나 θ로 모든 것을 기술할 수 있고 에너지가 자연스러운 도구가 된다. 위치 에너지(potential energy)는 각이 $\frac{2}{3}\pi$씩 차이 나는 세 코사인의 합이다. 이들을 합치면 하나의 식 $A\cos\theta + B\sin\theta$가 되는데, 이는 사실상 하나의 코사인 파동이다. 일단 이 꼴로 쓰고 나면 평형(equilibrium) 위치, 그 안정성(stability), 그리고 꼭대기를 넘어가는 데 필요한 에너지를 모두 바로 읽어 낼 수 있다.

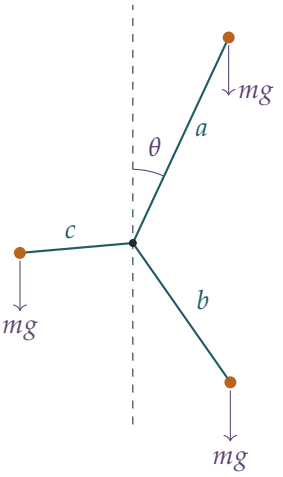
풀이

에너지

입자들을 가벼운 강체 막대 끝에 달린 점질량으로 모형화하고, 베어링은 매끄러워서 에너지 손실이 없다고 하자. 그림처럼 모든 각은 위쪽 연직 방향에서 시계 방향으로 잰다. 그러면 길이가 a, b, c인 막대는 위쪽 연직 방향과 각각 $\theta, \theta + \frac{2}{3}\pi, \theta + \frac{4}{3}\pi$의 각을 이루므로, 입자들은 축보다

$$a\cos\theta, \qquad b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right), \qquad c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)$$

만큼 높은 곳에 있다.



$\cos\frac{2}{3}\pi = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$를 이용하면

$$\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \qquad \cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

축을 위치 에너지의 기준점으로 잡으면

$$\begin{aligned} V &= mg\left[a\cos\theta + b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) + c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right] \\ &= mg\left[\tfrac{1}{2}(2a - b - c)\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c)\sin\theta\right]. \end{aligned}$$

각 입자는 각속도(angular velocity) $\dot{\theta}$로 축을 중심으로 원운동을 하므로, 속력은 $a\dot{\theta}$, $b\dot{\theta}$, $c\dot{\theta}$이다. 막대는 가벼우므로 전체 에너지는

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\cos\theta - \sqrt{3}\,(b - c)\sin\theta\right].$$

평형

계는 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$인 곳에서 평형 상태에 있다. 즉

$$-\tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\sin\theta + \sqrt{3}\,(b - c)\cos\theta\right] = 0.$$

$a > b$이고 $a > c$이므로 $2a - b - c > 0$이다. 따라서 평형 위치에서는 $\cos\theta \neq 0$이다. 만약 $\cos\theta = 0$이면 $\sin\theta = \pm 1$이고 괄호 안은 $\pm(2a - b - c) \neq 0$이 되기 때문이다. $\cos\theta$로 나누면

$$\tan\theta = -\frac{(b - c)\sqrt{3}}{2a - b - c},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. 이 논증은 거꾸로도 성립한다. 이 방정식을 만족하는 모든 θ는 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$을 만족한다. 따라서 평형 위치는 정확히 이 방정식의 해들이다.

정확히 두 개의 평형 위치와 그 안정성

탄젠트 함수는 주기가 π이고, 정의되는 길이 π의 각 구간에서 모든 실숫값을 정확히 한 번씩 취한다. 따라서 이 방정식은 $0 \le \theta < 2\pi$에서 정확히 두 개의 해를 가지며, 두 해는 π만큼 차이 난다. 이것이 두 평형 위치이다.

안정성을 판단하기 위해 V를 하나의 코사인으로 나타내자.

$$A = \tfrac{1}{2}(2a - b - c), \qquad B = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c),$$

로 두면 $V = mg(A\cos\theta + B\sin\theta)$이다. 그러면

$$\begin{aligned} 4(A^2 + B^2) &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2 \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca \\ &= 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 4R^2, \end{aligned}$$

이므로 $A^2 + B^2 = R^2$이고, 길이들이 서로 다르므로 $R > 0$이다. $\cos\alpha = A/R$, $\sin\alpha = B/R$인 α를 잡자. $A > 0$이고 $B < 0$이므로 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < 0$이다. 그러면

$$V = mgR\cos(\theta - \alpha).$$

두 평형 위치는 $V = mgR$이 최댓값인 $\theta = \alpha$와 $V = -mgR$이 최솟값인 $\theta = \alpha + \pi$이다.

? 생각해 보기 왜 V의 최소가 안정을 뜻하는가?

여기서 $V''(\theta) = -mgR\cos(\theta - \alpha)$이다. $\theta = \alpha + \pi$에서 이 값은 $mgR > 0$이므로, 조금만 변위가 생겨도 위치 에너지가 증가한다. 전체 에너지가 고정되어 있으므로 계는 멀리 벗어날 수 없고, 이 위치를 중심으로 진동한다. $\theta = \alpha$에서는 $V'' = -mgR < 0$이다. 조금만 변위가 생겨도 V가 감소하고 운동 에너지(kinetic energy)가 커져서 계는 멀어진다. 따라서 안정한 평형 위치는 $\theta = \alpha + \pi$, 즉 $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$이고 $\cos\theta < 0$, $\sin\theta > 0$인 쪽이다. 이 위치에서 가장 긴 막대 a는 수평선 아래를 향하며, 아래쪽 연직 방향과 $|\alpha|$의 각을 이룬다. 다른 평형 위치, 즉 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$이고 막대 a가 수평선 위에 있는 위치는 불안정하다.

완전한 회전

베어링이 매끄럽고 중력은 보존력(conservative force)이므로 에너지가 보존된다. $I = m(a^2 + b^2 + c^2)$으로 두면

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta - \alpha) = E.$$

완전한 회전을 하려면 계는 모든 각을 지나가야 하고, 특히 V가 최댓값 mgR을 갖는 $\theta = \alpha$를 지나가야 한다. 모든 곳에서 $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \ge 0$이므로 이를 위해서는 $E \ge mgR$이어야 한다. 계가 $V = -mgR$인 안정한 위치 $\theta = \alpha + \pi$를 지날 때의 각속도를 ω라 하자. 그러면

$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - mgR$이고, 조건은

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - mgR \geq mgR \quad \Longleftrightarrow \quad \omega^2 \geq \frac{4mgR}{I} = \frac{4gR}{a^2+b^2+c^2}.$$

가 된다. 따라서 계는 적어도 $\sqrt{4gR/(a^2+b^2+c^2)}$의 각속도로 안정한 평형 위치를 지나야 하며, 이것이 요구된 결과이다.

(등호가 성립하는 경계의 경우, 계는 불안정한 평형 위치를 향해 점점 느리게 다가가며 무한한 시간이 지나야 그곳에 도달한다. 엄밀히 말하면 완전한 회전을 하려면 ω가 이 값보다 엄밀히 커야 한다. 문제는 필요조건으로서의 경계만을 묻고 있다.)

검산

- $a = b = c$이면 $R = 0$이고 $V \equiv 0$이다. 같은 세 질량은 어떤 위치에서든 균형을 이루고(질량 중심(centre of mass)이 축 위에 있다), 아무리 약하게 돌려도 한 바퀴를 돈다. 이는 경계값이 0으로 가는 것과 일치한다.
- $b = c$이면 탄젠트 조건은 $\tan\theta = 0$이 된다. 대칭성에 의해 긴 막대는 똑바로 위를 향하거나(불안정) 똑바로 아래를 향한다(안정).
- 임의의 길이에 대한 수치 계산으로 V의 꼴, 항등식 $A^2 + B^2 = R^2$, 그리고 평형 위치가 정확히 두 개이며 앞에서 말한 안정성을 가진다는 것을 확인할 수 있다. $a = 3$, $b = 2$, $c = 0.5$, $g = 9.81$일 때 임계 속력은 2.5406 rad s^{-1}이다. 운동 방정식을 수치적으로 따라가 보면, 이 값보다 2% 작으면 계가 되돌아오고 2% 크면 한 바퀴를 완전히 돈다.

흔한 실수

- 막대를 그림과 반대 방향으로 $\theta - \frac{2}{3}\pi$와 $\theta + \frac{2}{3}\pi$에 놓으면 $\sin\theta$ 항의 부호가 바뀌고, 그에 따라 탄젠트 조건의 부호도 바뀐다.
- $\cos\theta = 0$이 평형 위치가 될 수 없으므로 $\cos\theta$로 나누어도 잃는 것이 없다는 점을 언급하지 않고 "해가 두 개"라고 결론짓는 것.
- 운동 에너지를 $\frac{1}{2}m(a+b+c)^2\dot{\theta}^2$ 같은 식으로 쓰는 것. 각 입자는 저마다의 속력 $r\dot{\theta}$를 가지므로 관성 모멘트(moment of inertia)는 $m(a^2+b^2+c^2)$이다.

STEP 너머

이 계는 고정된 축을 중심으로 도는 강체, 즉 복합 진자(compound pendulum)이다. 그 에너지는 관성 모멘트와 질량 중심의 위치에만 의존하는데, 여기서 질량 중심은 축으로

부터 거리 $R/3$에 있다. $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V(\theta) = E$를 $(\theta, \dot{\theta})$ 위상 평면(phase plane) 위의 곡선으로 보고, 분리선(separatrix) 안쪽에서는 진동이, 바깥쪽에서는 회전이 일어난다고 보는 관점은 대학 1학년 역학의 핵심 아이디어이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 종류의 문제를 위한 강체의 회전과 에너지 방법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.