풀이

STEP III 2005, 문제 10

역학 • 고무줄과 마찰

> **STEP III 2005, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q10

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 변수, 즉 두 중심 사이의 거리 d에 달려 있다. 밴드의 길이는 d로 정해지므로, 밴드의 장력(tension)과 저장된 에너지는 d의 간단한 함수이다. 여기서 출발하여 에너지(마찰(friction)이 한 일에 맞서는 탄성 에너지(elastic energy))를 보면 원판이 어디서 멈추는지 알 수 있고, 밴드가 당기는 힘을 한계 마찰력(limiting friction)과 비교하면 원판이 멈춘 채로 있는지 알 수 있다.

풀이

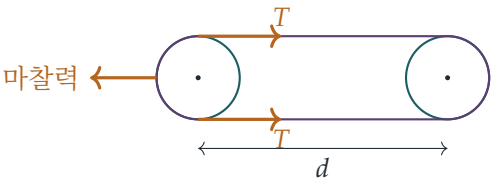
원판은 서로 같고, 밴드는 가볍고 탄성이 있으며 매끄럽게 접촉하고, 원판이 미끄러질 때마다 마찰력의 크기는 μmg라고 모형화한다. 대칭(symmetry)에 의해 두 원판은 항상 반대 방향으로 같은 거리만큼 움직이므로, 밴드의 직선 부분은 계속 평행을 유지한다.

d의 함수로 본 밴드. 두 중심이 거리 d만큼 떨어져 있을 때, 밴드는 각 원판을 반 바퀴씩 감고 길이가 d인 두 직선 부분을 따라 이어진다. 따라서 밴드의 길이는 $2\pi r + 2d$이고 늘어난 길이(extension)는 $x = 2d$이다. 탄성 계수(modulus) $\lambda = \frac{\pi mg}{12}$와 자연 길이(natural length) $2\pi r$에 대하여 훅의 법칙(Hooke's law)을 적용하면

$$T = \frac{\lambda x}{2\pi r} = \frac{\pi mg}{12} \cdot \frac{2d}{2\pi r} = \frac{mg\,d}{12r}, \qquad E = \frac{\lambda x^2}{2 \cdot 2\pi r} = \frac{mg\,d^2}{12r}.$$

접촉이 매끄러우므로 장력은 밴드 전체에서 같다. 각 원판은 두 직선 부분에 의해 당겨지는데, 두 부분 모두 중심선에 평행하고 다른 원판 쪽을 향한다. 따라서 각 원판을 당기는 합력(resultant)은

$$P = 2T = \frac{mg\,d}{6r}.$$



위에서 내려다본 이 그림은 왼쪽 원판이 다른 원판 쪽으로 미끄러지는 동안 그 원판에 작용하는 수평 방향의 힘을 나타낸다. 원판의 무게와 수직항력(normal reaction)은 수직 방향이며 서로 상쇄된다.

놓는 순간 $d = 6r$이므로 $E_0 = 3mgr$이고 $P = mg$이다. 접촉하는 순간 $d = 2r$이므로 $E = \frac{1}{3}mgr$이다.

원판이 가까워지는 동안의 에너지. 원판이 $d = 6r$에서 안쪽으로 움직이는 동안, 각 원판은 마찰력 μmg에 맞서 거리 $\frac{1}{2}(6r - d)$만큼 움직인다. 따라서 마찰력에 맞서 한 전체 일은 $\mu mg(6r - d)$이다. 그러므로 전체 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\begin{aligned} K(d) &= 3mgr - \frac{mg\,d^2}{12r} - \mu mg(6r - d) \\ &= mg\,(6r - d)\left(\frac{6r + d}{12r} - \mu\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $3r - \frac{d^2}{12r} = \frac{(6r-d)(6r+d)}{12r}$를 이용하였다.

소문항 (i)

출발. 놓는 순간 각 원판을 당기는 힘은 $P = mg$이고, 마찰력은 최대 μmg까지 작용할 수 있다. 따라서 원판은 정확히 $mg > \mu mg$일 때, 즉 $\mu < 1$일 때 미끄러지기 시작한다.

정지. $\mu < 1$이라 하자. $d < 6r$에서 $K(d)$는 $\frac{6r+d}{12r} = \mu$인 곳에서만 0이 되며, 그곳은

$$d^* = 12\mu r - 6r.$$

이다. d가 $6r$에서 감소할 때 두 번째 인수 $\frac{6r+d}{12r} - \mu$는 $1 - \mu > 0$에서 출발하여 감소하므로, d가 d^*에 이를 때까지 $K > 0$이다. 원판이 충돌하기 전에 멈추는 것은 접촉하기 전에 d^*에 도달할 때, 즉 $2r < d^* < 6r$일 때와 정확히 같다.

$$8r < 12\mu r < 12r \iff \tfrac{2}{3} < \mu < 1.$$

$\mu \le \frac{2}{3}$이면 $K(2r) \ge 0$이므로 원판이 먼저 서로 닿는다. ($\mu = \frac{2}{3}$일 때는 속력 0으로 막 닿으며 도착하는데, 이는 "충돌하기 전"이 아니다.)

생각해 보기 원판이 d^*에서 멈춘 뒤, 밴드가 원판을 다시 움직이게 할 수 있을까?

d^*에서 당기는 힘은 $P = \frac{mg\,d^*}{6r} = (2\mu - 1)mg$이다. $\mu < 1$이므로 이 값은 한계 마찰력 μmg보다 작다. 따라서 정지 마찰(static friction)이 원판을 붙잡아 원판은 정지한 채로 있다. 두 조건을 합하면, 원판이 미끄러지기 시작하되 충돌하기 전에 멈출 필요충분조건은 $\frac{2}{3} < \mu < 1$이다. ■

소문항 (ii)

원판이 적어도 한 번 충돌한다면, 원판은 가까워지는 공식이 여전히 성립하는 상태에서 안쪽으로 움직이며 처음으로 $d = 2r$에 도달해야 한다. 따라서 첫 충돌 직전의 전체 운동 에너지는

$$K(2r) = mg\,(4r)\left(\frac{8r}{12r} - \mu\right) = 4mgr\left(\tfrac{2}{3} - \mu\right) = \tfrac{4}{3}mgr(2 - 3\mu),$$

이며, 이것이 요구된 결과이다. (이 값은 정확히 $\mu < \frac{2}{3}$일 때 양수이며, 이는 소문항 (i)과 일치한다.)

소문항 (iii)

먼저 $\mu^2 < \frac{4}{9}$이면 $\mu < \frac{2}{3}$이므로, 소문항 (i)과 (ii)에 의해 원판은 실제로 충돌한다. 운동 에너지의 절반을 잃으므로, 원판은 $d = 2r$에서 전체 운동 에너지

$$K_1 = \tfrac{2}{3}mgr(2 - 3\mu).$$

를 가지고 튕겨 나온다. 이제 원판은 서로 멀어진다. 밴드와 마찰력이 모두 다른 원판 쪽으로 작용하므로 각 원판은 감속한다. 거리가 $2r$에서 d로 늘어나는 동안 탄성 에너지는 $\frac{mg(d^2-4r^2)}{12r}$만큼 증가하고 마찰력에 맞서 한 일은 $\mu mg(d - 2r)$이므로

$$K(d) = K_1 - \frac{mg(d^2 - 4r^2)}{12r} - \mu mg(d - 2r).$$

이다. 이 함수는 d에 대해 순감소하므로, 원판이 멈추는 거리 d_1에서 정확히 한 번 0이 된다. $d_1 = 2r + u$로 놓고 $\frac{12r}{mg}$를 곱하면

$$u^2 + 4r(1 + 3\mu)\,u - 8r^2(2 - 3\mu) = 0.$$

이다. 양의 근을 택하고 판별식(discriminant)을 $(1 + 3\mu)^2 + 2(2 - 3\mu) = 9\mu^2 + 5$로 정리하면

$$u = 2r\left(\sqrt{9\mu^2 + 5} - (1 + 3\mu)\right), \qquad d_1 = 2r\left(\sqrt{9\mu^2 + 5} - 3\mu\right).$$

를 얻는다. ($2r < d_1 \le 6r$임을 확인할 수 있으므로, 밴드는 팽팽하게 유지되고 밴드의 에너지 공식도 여전히 적용된다.)

? **생각해 보기** 원판은 d_1에서 순간적으로 정지한다. 원판이 그대로 머무를지는 무엇이 결정할까?

밴드가 당기는 힘이 한계 마찰력을 넘지 않으면 원판은 정지한 채로 있다.

$$\frac{mg\,d_1}{6r} \le \mu mg \iff \sqrt{9\mu^2+5}-3\mu \le 3\mu \iff 9\mu^2+5 \le 36\mu^2 \iff \mu^2 \ge \tfrac{5}{27},$$

여기서 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 된다. 따라서 $\frac{5}{27} < \mu^2 < \frac{4}{9}$이면, 원판은 충돌하고 튕겨 나온 뒤 단조롭게 감속하여 d_1에서 멈추고, 그 후 정지 마찰에 의해 영원히 그곳에 붙잡혀 있다. 원판은 첫 충돌 후 정확히 한 번 멈춘다. ■

검산

- $\mu = \frac{2}{3}$에서 소문항 (i)의 정지 위치 $d^* = 12\mu r - 6r$와 소문항 (ii)의 운동 에너지는 모두 "속력 0으로 $d = 2r$에 도착"을 주므로, 두 소문항은 경계에서 일치한다.
- $\mu = 0.5$(소문항 (iii)의 범위 안)일 때: $K(2r) = \frac{2}{3}mgr$, $K_1 = \frac{1}{3}mgr$, $d_1 = 2r(\sqrt{7.25} - 1.5) \approx 2.385r$이다. 그곳에서 당기는 힘은 $\approx 0.397mg < 0.5mg$이므로 원판은 그대로 머문다. 운동을 단계별로 수치 시뮬레이션한 결과 이 모든 것이 재현되었고, 여러 $\mu \in (\frac{2}{3}, 1)$에 대해 정지 위치 $d^* = 12\mu r - 6r$도 재현되었다. $\mu^2 < \frac{5}{27}$(예를 들어 $\mu = 0.42$)일 때는 예측대로 원판이 멈춘 뒤 다시 움직였다.

흔한 실수

- 늘어난 길이를 $2d$가 아니라 d로 잡는 것: 두 직선 부분이 모두 늘어난다.
- 각 원판에 장력을 하나만 쓰는 것: 밴드는 각 원판을 두 가닥으로 당기므로 $2T$가 된다.
- 원판이 일단 멈춘 뒤 정지 상태를 유지하는지 확인하지 않는 것. "속력이 0"인 것과 "영원히 정지"하는 것은 서로 다른 조건이다.

STEP 너머

마찰 때문에 이 문제는 구간별 시스템(piecewise system)이 된다. 운동 방정식(equation of motion)은 속도의 부호가 바뀔 때마다 달라지고, 작용하는 힘이 마찰 임계값보다 작은 곳에서는 "달라붙은" 상태가 나타난다. 이런 시스템(고착–미끄럼 운동(stick–slip motion))은 대학 1학년 동역학에서 위상 평면(phase plane) 방법으로 연구한다. μ가 작으면 에너지 손실을 동반한 반복 충돌이 유한한 시간 안에 무한히 많은 튕김을 만들어 내는데, 이는 생각해 볼 만한 주제이다. 에너지 방법과 마찰에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.