풀이

STEP III 2005, 문제 1

순수수학 • 삼각방정식과 그래프

> **STEP III 2005, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q1

핵심 아이디어

sin(어떤 것) = cos(다른 어떤 것) 꼴의 방정식은 $\cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$를 이용하면 언제나 두 **인수**(*argument*)에 대한 명제로 바꿀 수 있다. 이를 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$에 적용하면 $\sin x \mp \cos x$가 $\frac{\pi}{2}$의 홀수 배와 같아야 한다는 결론이 나오는데, $|\sin x \pm \cos x|$에 대한 상계(bound)를 보면 이 값은 그 크기에 도달하기에는 너무 작다. 그래프의 개형은 안쪽 인수가 짧은 구간에서만 움직일 때 바깥쪽 함수가 그 인수에 어떤 일을 하는지 생각하면 자연스럽게 따라 나온다.

풀이

방정식 $\sin A = \cos B$

$\cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$이므로, $C = \frac{\pi}{2} - B$로 두고 $\sin A = \sin C$의 일반해(general solution)를 구하면 된다. 사인함수는 한 주기(period) 2π 안에서 $[-1, 1]$의 각 값을 C와 $\pi - C$에서 정확히 두 번 취하므로(값이 ± 1일 때는 두 점이 일치한다)

$$\sin A = \sin C \iff A = C + 2k\pi \text{ 또는 } A = \pi - C + 2k\pi \quad \text{어떤 정수} k.$$

이다. 여기에 $C = \frac{\pi}{2} - B$를 대입하면

$$A = \tfrac{\pi}{2} - B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} - B,$$
$$\text{또는} \quad A = \pi - \tfrac{\pi}{2} + B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} + B.$$

따라서 $\sin A = \cos B$일 필요충분조건은 어떤 정수 n에 대하여 $A = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B$인 것이다. 위의 각 단계가 모두 "필요충분조건"이므로 양방향이 모두 보장된다. ("충분조건" 방향을 직접 확인하면, 주기 2π를 이용하여 $\sin((4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B) = \sin(\frac{\pi}{2} \pm B) = \cos B$이다.)

상계와 방정식 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$

삼각함수의 덧셈정리(compound angle formula)를 이용하면

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\tfrac{\pi}{4} \pm \cos x \sin\tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin(x \pm \tfrac{\pi}{4}),$$

이고, 모든 θ에 대하여 $|\sin\theta| \le 1$이므로 모든 x에 대하여 $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$를 얻는다. 이것이 증명하려던 것이다.

이제 어떤 x에 대하여 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$라고 가정하자. 첫 번째 결과에서 $A = \sin x$, $B = \cos x$로 두면, 어떤 정수 n이 존재하여

$$\sin x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2} \pm \cos x, \qquad \text{즉,} \qquad \sin x \mp \cos x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2}.$$

? **생각해 보기** 우변은 왜 작아질 수 없을까?

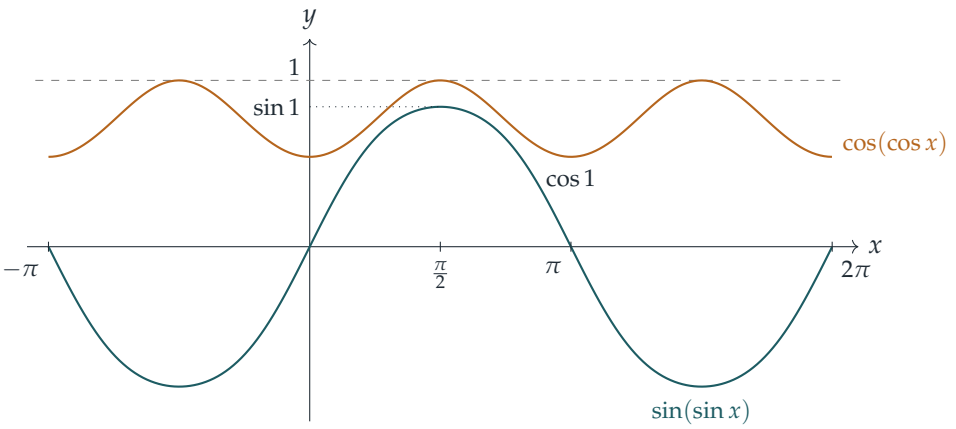
$4n+1$은 홀수이므로 결코 0이 아니다. 따라서 $|4n+1| \ge 1$이고, 우변의 절댓값(modulus)은 적어도 $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$이다. 반면 좌변의 절댓값은 많아야 $\sqrt{2} \approx 1.414$이다. $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$이므로(양변을 제곱하면 $\pi^2 > 9 > 8$이므로 $2 < \frac{\pi^2}{4}$이다) 이는 불가능하다. 그러므로 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$는 해를 갖지 않는다.

$y = \sin(\sin x)$와 $y = \cos(\cos x)$의 그래프 그리기

$y = \sin(\sin x)$. 안쪽 함수 $\sin x$는 $[-1,1]$ 위를 움직이고, 이 구간에서 sin은 증가한다($[-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$이므로). 따라서 $\sin(\sin x)$는 $\sin x$가 증가하고 감소할 때 정확히 같이 증가하고 감소한다. 즉 주기가 2π이고, 홀함수(odd function)이며, $x = n\pi$에서 0이 되고, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$에서 최댓값 $\sin 1 \approx 0.841$을, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$에서 최솟값 $-\sin 1$을 갖는다. 기울기(gradient) $\cos x \cos(\sin x)$는 원점에서 1이다. 그래프는 사인 곡선을 약간 납작하게 누른 모양이다.

$y = \cos(\cos x)$. $\cos(-u) = \cos u$이고 $\cos(x+\pi) = -\cos x$이므로 $\cos(\cos(x+\pi)) = \cos(\cos x)$이다. 즉 그래프는 주기가 π이고 짝함수(even function)이다. $[-1,1]$에서 $\cos u$는 $u = 0$일 때 가장 크고($= 1$), $u = \pm 1$일 때 가장 작다($= \cos 1 \approx 0.540$). 따라서 $\cos(\cos x)$는 $\cos x = 0$인 곳, 즉 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$에서 최댓값 1을 갖고, $\cos x = \pm 1$인 곳, 즉 $x = n\pi$에서 최솟값 $\cos 1$을 갖는다. 그래프는 언제나 0.54와 1 사이에 있다.

앞 문항에 의해 두 곡선은 결코 만나지 않으며, $\cos(\cos 0) = \cos 1 > 0 = \sin(\sin 0)$이므로 연속성(continuity)에 의해 코사인 쪽 곡선이 모든 곳에서 사인 쪽 곡선보다 엄격히 위에 있다. 두 곡선이 가장 가까워지는 곳(간격이 약 0.107)은 $x \approx 0.88$ 근처로, 여기서 $\sin(\sin x)$는 거의 꼭대기에 다다랐고 $\cos(\cos x)$는 아직 올라가는 중이다.



$y = \sin(2\sin x)$의 그래프 그리기

이 함수도 주기가 2π인 홀함수이고 $x = n\pi$에서 영점을 가지므로, $0 \le x \le \pi$에서의 모양만 이해하면 충분하다. 이 구간에서 그래프는 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다($\sin(\pi - x) = \sin x$이므로).

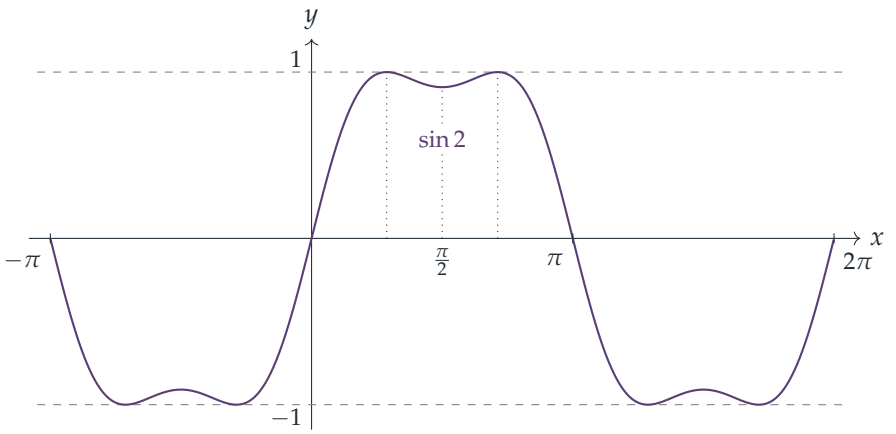
이번에 달라지는 점은 이 구간에서 안쪽 인수 $u = 2\sin x$가 $[0, 2]$ 위를 움직이는데, $2 > \frac{\pi}{2}$라는 것이다. 따라서 x가 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 증가할 때

- $\sin x$가 $\frac{\pi}{4}$까지 올라가는 동안, 즉 $x = \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 0.903$까지 u는 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 올라간다. 그동안 $y = \sin u$는 0에서 최댓값 1까지 증가한다.
- u는 계속해서 $\frac{\pi}{2}$에서 2까지 가는데, 여기서는 $\sin u$가 감소하므로 y는 $x = \frac{\pi}{2}$에서 $\sin 2 \approx 0.909$까지 다시 내려간다.

대칭성에 의해 y는 $x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 2.238$에서 다시 1까지 올라갔다가 $x = \pi$에서 0으로 내려간다. 도함수(derivative)로 확인해 보면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cos x \cos(2\sin x),$$

이고, 이 값은 정확히 $\cos x = 0$일 때($\frac{\pi}{2}$에서의 극소(local minimum)) 또는 $2\sin x = \pm\frac{\pi}{2}$일 때(최댓값 1) 0이 된다. 원점에서의 기울기는 2이다. $[\pi, 2\pi]$에서는 그림이 뒤집힌다. 최솟값 -1이 두 번 나타나고, 그 사이 $x = \frac{3\pi}{2}$에서 극댓값 $-\sin 2$를 갖는다. 사인 곡선의 봉우리 하나하나가 얕게 패인 낙타 등 모양이 된 것이다.



검산

- $B = 0.3$, $n = 1$로 두자. $A = \frac{5\pi}{2} - 0.3$이면 $\sin A = \cos 0.3 \approx 0.9553$으로, 기대한 대로이다.
- 한 주기에 걸쳐 촘촘한 격자점에서 $\cos(\cos x) - \sin(\sin x)$를 계산하면 최솟값이 약 0.107($x \approx 0.878$ 근처)이고 결코 0이 되지 않는다. 이로써 두 곡선이 만나지 않음을 확인할 수 있다.
- $\sin(2\sin x)$에 대하여 $[0, \pi]$를 수치적으로 조사하면 정확히 세 개의 극점(turning point)이 나온다. $x \approx 0.903$과 2.238에서의 최댓값 1, 그리고 $\frac{\pi}{2}$에서의 극솟값 $\sin 2 \approx 0.909$이다.

흔한 실수

- $A = \frac{\pi}{2} - B + 2n\pi$만 쓰고, $\sin(\pi - C) = \sin C$에서 나오는 두 번째 해의 족 $A = \frac{\pi}{2} + B + 2n\pi$를 빠뜨리는 것.
- $n = 0$도 허용된다는 사실을 잊고 $|4n + 1| \geq 5$만 확인하는 것. 결정적인 비교 대상은 $\frac{\pi}{2}$ 자체이다.
- $\sin(2\sin x)$를 높이가 1인 평범한 사인 곡선으로 그리는 것. $2 > \frac{\pi}{2}$이므로 안쪽 인수가 사인의 꼭대기를 지나쳐 버리고, 이 때문에 $x = \frac{\pi}{2}$에서 움푹 팬 부분이 생긴다.

STEP 너머

여기서 그린 그래프는 모두 합성(composition)에 관한 것이다. $f(g(x))$의 모양은 g의 치역(range)이 f의 그래프 중 어느 부분을 덮는지에 따라 정해진다. 이 생각을 반복하면($\sin(\sin(\sin x))$ 등) 고정점(fixed point)과 반복 사상(iterated map)의 동역학으로 이어지는데, 여기서는 $f(f(\cdots f(x)))$가 언제 한 값으로 안정되는지를 묻는다. 양변이 가질 수 있는 값의 범위를 비교하는 부등식 논증은 해석학 전반에서 쓰이는 기법의 간단한 예이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이런 논증이 어떻게 엄밀해지는지 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.