풀이

STEP II 2005, 문제 9

역학 • 경사면에서의 마찰

> **STEP II 2005, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q9

핵심 아이디어

두 입자(particle)를 따로 다룬다. A에는 가해지는 힘이 없으므로, 그 식이 줄이 제공해야 할 장력(tension)을 결정한다. 선택의 자유는 모두 B에 작용하는 P의 **방향**에 있다. P를 기울이면 B에 작용하는 수직항력(normal reaction)이 바뀌고, 따라서 B에 작용하는 마찰력(friction)도 바뀐다. P를 경사면에서 벗어나게 기울이면 경사면 방향 성분의 일부를 잃지만 마찰력이 달라지며, 최적의 기울기는 이 두 효과가 균형을 이루는 곳이다. 결국 최대화해야 할 식 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 꼴이 나온다.

풀이

A와 B를 입자로, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며(light and inextensible) ℓ을 따라 놓여 있는 것으로 모형화한다. P는 ℓ을 포함하는 연직 평면 안에서 작용한다고 하자. 경사면을 가로지르는 P의 성분은 아무 도움이 되지 않는다. 다음에 주목하자.

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

따라서 $\mu_B = \tan 30^\circ$이다. 즉, 혼자 있다면 B는 정확히 미끄러지기 직전 상태에 있다. 또한 $\mu_A = \tfrac{1}{2}\tan 30^\circ$이므로, 혼자 있다면 A는 미끄러진다.

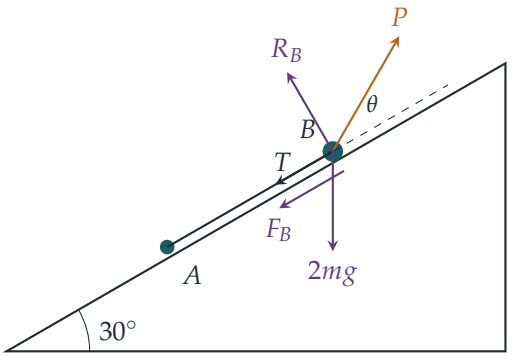
입자 A. 면에 수직인 방향으로 성분을 분해(resolving)하면 $R_A = mg\cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}mg$이므로, A에 작용하는 마찰력의 최댓값은 다음과 같다.

$$\mu_A R_A = \tfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} mg = \tfrac{1}{4}mg.$$

경사면 아래 방향의 무게 성분은 $mg\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}mg$이다.

입자 B. P가 ℓ의 위쪽 방향과 이루는 각을 θ라 하고, 면에서 멀어지는 쪽으로 잰다. (θ가 음

수이면 P가 면 쪽으로 민다는 뜻이다.) 장력을 T라 하자.



그림에는 (i)에서처럼 경사면 아래 방향으로 작용하는 마찰력 F_B를 나타냈다. 면에 수직인 방향으로는

$$R_B + P\sin\theta = 2mg\cos 30^\circ \quad \Longrightarrow \quad R_B = \sqrt{3}\,mg - P\sin\theta.$$

따라서 B에서 낼 수 있는 마찰력의 최댓값은

$$\mu_B R_B = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\,mg - P\sin\theta\right) = mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta.$$

경사면 아래 방향의 B의 무게 성분은 $2mg\sin 30^\circ = mg$이다.

소문항 (i)

입자들이 ℓ을 따라 위로 움직이려면, 각 입자에 작용하는 마찰력은 경사면 아래 방향이다. P가 최소일 때 두 입자 모두 움직이기 직전이므로, 두 입자 모두에서 마찰력은 최대 정지마찰력(limiting friction)이다.

A가 위로 움직이려면, 줄이 무게 성분과 마찰력을 이겨야 한다.

$$T = \tfrac{1}{2}mg + \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{3}{4}mg.$$

B에 대해서는 경사면 방향으로, P의 성분이 T, 무게 성분, 최대 정지마찰력을 이겨야 한다.

$$P\cos\theta = \tfrac{3}{4}mg + mg + \left(mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right),$$

$$P\left(\cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) = \tfrac{11}{4}mg.$$

생각해 보기 P를 경사면에서 멀어지는 쪽으로 기울이면 경사면 방향의 P 성분이 줄어드는데, 왜 도움이 될까?

B를 살짝 들어 올리면 R_B가 줄고, 따라서 P가 이겨야 할 마찰력도 줄어든다. 작은 기울기 θ에 대해 $\cos\theta$는 $1-\frac{1}{2}\theta^2$ 정도로만 줄어드는 반면 $\sin\theta$는 θ 정도로 커진다. 그래서 처음에는 마찰력 감소로 얻는 이득이 더 크다. 최적의 각을 찾기 위해 다음과 같이 쓴다.

$$\cos\theta+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\tfrac{1}{2}\sin\theta\right)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta-30^\circ).$$

이 값은 최대 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, 등호는 정확히 $\theta=30^\circ$일 때 성립한다. P에 이 인수를 곱한 값이 $\frac{11}{4}mg$와 같아야 하므로, 인수가 최대일 때 P가 최소이다.

$$P_{\min}=\tfrac{11}{4}mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg,$$

이로써 요구된 결과를 얻는다. B가 면 위에 머무르는지 확인해야 한다.

$$R_B=\sqrt{3}\,mg-\tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{16}\sqrt{3}\,mg>0.$$

따라서 P는 ℓ을 지나는 연직 평면 안에서, 면에서 멀어지는 쪽으로 ℓ과 30°를 이루며 작용한다. 즉, 경사면 위쪽으로 당기며 **수평선 위로** 60°의 방향으로 작용한다. (경사면과 이루는 최적의 각이 $\arctan\mu_B$, 즉 B의 마찰각(angle of friction)임에 주목하자.)

소문항 (ii)

이제 P는 계가 아래로 미끄러지는 것만 막으면 되므로, 각 입자에 작용하는 마찰력은 경사면 위쪽 방향이다. P가 없으면 A는 혼자 정지해 있을 수 없는데, 무게 성분 $\frac{1}{2}mg$가 마찰력의 최댓값 $\frac{1}{4}mg$보다 크기 때문이다. 따라서 줄이 A를 붙잡아 주어야 한다.

$$T\geq\tfrac{1}{2}mg-\tfrac{1}{4}mg=\tfrac{1}{4}mg.$$

특히 줄은 팽팽해야 한다. B가 아래로 미끄러지지 않으려면, 경사면 위쪽 방향의 힘들이 T와 무게 성분을 감당할 수 있어야 한다.

$$P\cos\theta+\left(mg-\tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right)\geq T+mg.$$

좌변은 T에 의존하지 않으므로, 가장 작은 P는 가장 작은 장력 $T=\frac{1}{4}mg$일 때 얻어진다. 그러면

$$P\left(\cos\theta-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\geq\tfrac{1}{4}mg.$$

이제 $\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta+30^\circ)\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, 등호는 $\theta=-30^\circ$일 때 성립한다. 이번에는 최적의 방향이 B를 면 **쪽으로** 밀어서 R_B를 늘리고, 따라서 B를 붙잡는 데 도움이 되는 마찰력을 늘린다. 그러므로 최소 크기는

$$P_{\min}=\tfrac{1}{4}mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{1}{8}\sqrt{3}\,mg.$$

이 힘은 ℓ의 위쪽 방향에서 아래로 30° 기운 방향으로 작용한다. ℓ이 30°로 올라가므로 그 방향은 수평이다. 즉, B를 경사면 쪽으로 수평하게 미는 힘이다. 이 값에서 A와 B는 모두 한계 평형(limiting equilibrium) 상태에 있으며, $T=\frac{1}{4}mg$이다.

검산

- $m = g = 1$로 두고 수치적으로 확인했다. 연직 평면 안에서 P의 모든 방향을 훑으며, 각 방향마다 이분법(bisection)으로 가장 작은 P를 구했다. (i)에서 최솟값은 경사면과 30.0°를 이룰 때의 $2.3816 \approx \frac{11}{8}\sqrt{3}$이다. (ii)에서는 −30.0°, 즉 수평 방향일 때의 $0.2165 \approx \frac{1}{8}\sqrt{3}$이다. 또한 (ii)의 최솟값에서 완전한 평형이 존재함도 확인했다.
- P가 경사면 방향일 때($\theta = 0$) (i)의 전체 힘 계산: $P = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mg + mg + mg = \frac{11}{4}mg \approx 2.75mg$가 필요하다. 이는 예상대로 $2.38mg$보다 크다.
- P가 경사면 방향일 때 (ii)에서 계에 필요한 힘은 $\frac{3}{2}mg - \frac{1}{4}mg - mg = \frac{1}{4}mg$이다. 수평으로 미는 힘은 $\frac{\sqrt{3}}{8}mg \approx 0.217mg$로 이보다 낫다.

흔한 실수

- P가 경사면 방향으로 작용한다고 가정하는 것. 문제는 가장 작은 **크기**를 묻고 있으므로, 방향은 자유롭게 고를 수 있다.
- $P\sin\theta$가 R_B를 바꾸고, 따라서 B에 작용하는 최대 정지마찰력도 바꾼다는 사실을 잊는 것.
- (ii)에서 (i)의 마찰력 방향을 그대로 쓰는 것. 아래로 미끄러질 위험이 있을 때 마찰력은 경사면 위쪽으로 작용한다.

STEP 너머

두 소문항은 같은 원리에 기대고 있다. 마찰력에 맞서는 가장 효율적인 힘은 운동 방향의 직선과 마찰각 $\lambda = \arctan\mu$를 이룬다. (i)에서는 면에서 멀어지는 쪽으로, (ii)에서는 면 쪽으로 기울어진다. 이는 수직항력과 최대 정지마찰력이 합쳐져 법선과 각 λ를 이루는 하나의 "전체 반력"(total reaction)이 되기 때문이다. 이 전체 반력의 관점에서 생각하면 많은 마찰 문제가 힘의 삼각형(triangle of forces)에 관한 기하 문제로 바뀐다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 마찰과 구속 운동을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.