풀이

STEP II 2005, 문제 8

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

STEP II 2005, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q8

핵심 아이디어

이 방정식은 변수분리형(separable)이다. y에 대한 의존성은 모두 하나의 인수 y^2에 담겨 있으므로, 이것으로 나누면 $\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$를 얻는데, 이는 $-1/y$의 도함수(derivative)이다. x에 대한 적분은 치환(substitution) $u = 1 + x^2$로 풀린다. 홀수 거듭제곱 x^3이 u에 필요한 $x\,\mathrm{d}x$를 제공하기 때문이다. 두 번째 곡선에서는 우변이 y^2가 아니라 z^3이라는 점에 주목한다. 이때 살펴볼 양은 $1/z^2$이며, 이것은 $1/y$와 정확히 같은 방정식을 만족함을 알게 된다.

풀이

y 구하기

C 위에서 $y(0) = 1 > 0$이고, 방정식의 우변은 $x \geq 0$에서 결코 음이 아니므로 y는 감소하지 않는다. 따라서 어디서나 $y \geq 1$이고, y^2으로 나눌 수 있다.

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

적분을 위해 $u = 1 + x^2$로 놓으면 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$이고 $x^3\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(u-1)\,\mathrm{d}u$이다.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (u^{-3/2} - u^{-5/2})\,\mathrm{d}u = -u^{-1/2} + \tfrac{1}{3}u^{-3/2} + \text{상수} \\ &= -\frac{3u-1}{3u^{3/2}} + \text{상수} = -\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + \text{상수}.\end{aligned}$$

그러므로 어떤 상수 k에 대하여

$$\frac{1}{y} = \frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + k$$

이다. $x = 0$에서 이 식은 $1 = \frac{2}{3} + k$가 되므로 $k = \frac{1}{3}$이고, 이것이 구하는 결과이다.

$$\frac{1}{y} = \frac{2 + 3x^2}{3(1 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{3}.$$

큰 x

지배적인 거듭제곱, 즉 분자에서 $3x^2$을, $(1 + x^2)^{3/2}$에서 x^3을 묶어 낸다.

$$\frac{2 + 3x^2}{3(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{3x^2(1 + \frac{2}{3x^2})}{3x^3(1 + \frac{1}{x^2})^{3/2}} = \frac{1}{x}\Big(1 + \frac{2}{3x^2}\Big)\Big(1 - \frac{3}{2x^2} + \cdots\Big) = \frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big),$$

여기서 이항전개(binomial expansion)를 사용했는데, 큰 x에 대해 $1/x^2 < 1$이므로 이는 타당하다. 따라서

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big) = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{3}{x} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big),$$

이고, $(1 + t)^{-1} = 1 - t + O(t^2)$를 이용해 역수를 취하면

$$y = 3\Big(1 - \frac{3}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) \approx 3 - \frac{9}{x},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

생각해 보기 왜 $\frac{2}{3x^2}$과 $-\frac{3}{2x^2}$ 항은 버려도 되지만 $\frac{1}{x}$는 버리면 안 되는가?

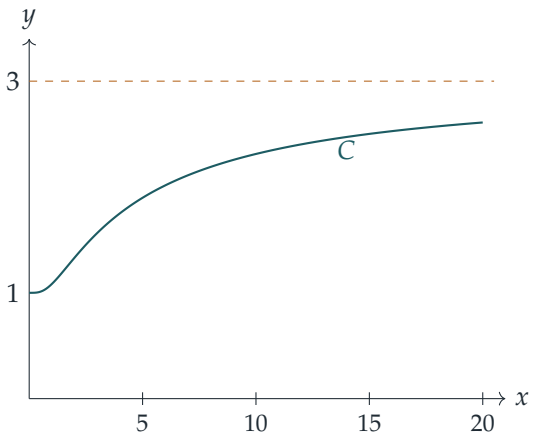
목표인 $3 - \frac{9}{x}$는 $\frac{1}{x}$ 차수까지 정확하다. $1/y$에서 보정 항들은 $\frac{1}{x}$보다 인수 $\frac{1}{x^2}$만큼 더 작으므로, y에는 $\frac{1}{x^2}$ 차수 이상에서만 영향을 준다. $-\frac{9}{x}$를 만들어 내는 것은 바로 $\frac{1}{x}$ 항 자체이다.

C의 개형

이제 곡선의 특징을 정리한다.

- $y(0) = 1$이고, $x = 0$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$이다. 원점 근처에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \approx x^3$이므로 $y \approx 1 + \frac{1}{4}x^4$이다. 즉 곡선은 매우 평평하게 출발한다.
- $x > 0$에서 기울기는 양수이므로 y는 증가한다.
- $1/y$의 첫째 항은 양수이므로 $1/y > \frac{1}{3}$이고, 따라서 모든 x에 대해 $1 \le y < 3$이다. 곡선은 결코 발산하지 않는다.
- $x \to \infty$일 때, $y \to 3$이며 아래쪽에서 $3 - \frac{9}{x}$처럼 다가간다. 이 접근은 느리다. $y(10) \approx 2.31$이다.

곡선은 아래로 볼록(concave up)하게 출발한 뒤 $y = 3$을 향해 평평해지므로, 변곡점(point of inflection)을 가져야 한다.



z에 대한 곡선

$z \neq 0$인 곳에서는 z^3으로 나눌 수 있다. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z^{-2}) = -2z^{-3}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2}{z^3}\cdot\frac{x^3z^3}{2(1+x^2)^{5/2}} = -\frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}},$$

이고, 이것은 $1/y$가 만족하는 방정식과 정확히 같다. 두 곡선 모두에서 $x = 0$일 때 $1/z^2 = 1$로, $1/y$와 같은 값이다. 따라서

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{y}, \qquad \text{즉} \qquad z^2 = y.$$

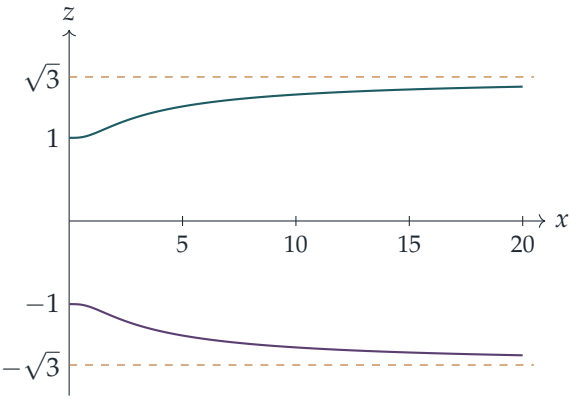
이로써 z가 결코 0에 이르지 않음도 확인되며, 나눗셈이 정당화된다. $z \neq 0$인 동안 $z^2 = y \geq 1$이므로 z는 0에 가까워질 수 없다. 그러므로 연속성(continuity)에 의해 z는 처음의 부호를 유지하며, 두 곡선은

$$z = \sqrt{y} \quad (z(0) = 1), \qquad z = -\sqrt{y} \quad (z(0) = -1).$$

이다. 위쪽 곡선은 1에서 $\sqrt{3}$을 향해 올라가며, 역시 평평하게 출발한다 (이번에는 $z \approx 1 + \frac{1}{8}x^4$). 큰 x에 대해서는

$$z = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{x} + \cdots\right)^{1/2} \approx \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2x}.$$

아래쪽 곡선은 이를 x축에 대해 대칭이동한 것으로, -1에서 점근선(asymptote) $z = -\sqrt{3}$을 향해 내려간다.



생각해 보기 $z(0) = -1$인 곡선은 왜 다른 곡선을 평행이동하거나 다르게 변환한 것에 불과하지 않은가?

이 방정식은 z에 대해 홀함수(odd) 꼴이다. z를 $-z$로 바꾸면 양변이 모두 -1배가 된다. 따라서 $z(x)$가 해이면 $-z(x)$도 해이고, -1에서 출발하는 해는 $+1$에서 출발하는 해를 대칭이동한 것이다. 이는 $z = \pm\sqrt{y}$와 일치한다.

검산

- 답을 미분해 본다. $1/y = u^{-1/2} - \frac{1}{3}u^{-3/2} + \frac{1}{3}$에서 $\mathrm{d}(1/y)/\mathrm{d}x = 2x\left(-\frac{1}{2}u^{-3/2} + \frac{1}{2}u^{-5/2}\right) = -x^3u^{-5/2}$을 얻으며, 이는 필요한 결과이다.
- 원래 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법) 풀면 $y(1) = 1.08391$, $y(5) = 1.89777$을 얻으며, 공식과 유효숫자(significant figures) 10자리 이상까지 일치한다. z에 대한 방정식을 수치적으로 풀면 $z(5) = \pm 1.37759 = \pm\sqrt{y(5)}$를 얻는다.
- $x = 100$에서 공식은 $y = 2.9126$을 주고, $3 - \frac{9}{x} = 2.91$이다. 차이는 약 $27/x^2$로, $O(1/x^2)$ 오차와 부합한다.

흔한 실수

- 음의 부호를 빠뜨리는 것: $\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = -y^{-1}$.
- $3 - \frac{9}{x}$가 3에 "가까워 보인다"는 이유로 $y \to 3$이 빠르게 일어난다고 결론짓는 것. $x = 10$에서 곡선은 아직 약 2.3에 불과하다.
- 두 곡선 모두에 대해 $z = \sqrt{y}$라고 쓰거나, z가 부호를 바꿀 수 없는 이유를 설명하지 않는 것.

STEP 너머

두 방정식은 모두 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)\,y^n$ 꼴로, **베르누이 방정식**(Bernoulli equation)의 특수한 경우이다. 베르누이 방정식은 치환 $w = y^{1-n}$에 의해 항상 선형 방정식(linear equation)으로 바뀐다. 우리가 사용한 것이 바로 이 치환이다. $w = 1/y$와 $w = 1/z^2$. "같은 방정식, 같은 초깃값이면 같은 함수"라는 단계는 1계(first-order) 방정식에 대한 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem, 피카르–린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리)의 한 예이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)가 두 가지를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.