풀이

STEP II 2005, 문제 7

순수수학 • 벡터와 원운동

STEP II 2005, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q7

핵심 아이디어

각 위치 벡터(position vector)는 cos(각) $\mathbf{a}$ + sin(각) $\mathbf{b}$ 꼴이며, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 서로 수직(perpendicular)이고 길이가 같으면 이 벡터는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 이루는 평면 위에서 원을 그린다. $|OP|$와 $|OQ|$가 일정하다는 것을 알고 나면 각 POQ는 스칼라곱(scalar product)에서 곧바로 얻어지고, 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formulae)을 쓰면 하나의 코사인으로 깔끔하게 정리된다. 그러면 마지막 소문항은 두 주기(period) 전체에 걸친 코사인 하나에 대한 부등식(inequality)이 된다.

풀이

소문항 (i)

P와 Q의 위치벡터를 각각 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$라 하자.

P에 대하여 $\mathbf{p} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$이므로 $|\mathbf{p}| = 1$이고 $\mathbf{p}$는 xy-평면 위에 있다. 따라서 P는 평면 $z = 0$ 위에서 중심이 O이고 반지름이 1인 원을 따라, 위에서(양의 z축 쪽에서) 내려다볼 때 시계 반대 방향으로, 일정한 각속력(angular speed) 1로(따라서 속력 1로) 움직인다. P는 $(1, 0, 0)$에서 출발하며, t가 0에서 2π까지 변하는 동안 정확히 한 바퀴를 돈다.

Q에 대해서는 $s = t + \frac{1}{4}\pi$로 놓고

$$\mathbf{a} = \tfrac{3}{2}\mathbf{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{j}, \qquad \text{이라 하면} \qquad \mathbf{q} = \cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}.$$

이제 $|\mathbf{a}|^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9$, $|\mathbf{b}|^2 = 9$이고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$이다. 따라서

$$|\mathbf{q}|^2 = 9\cos^2 s + 9\sin^2 s + 2\cos s \sin s\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = 9,$$

이고, $\mathbf{q}$는 항상 O를 지나고 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{j}$로 생성되는 평면 위에 있다. 이 평면은 y축과 방향

$\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{k}$를 포함하므로 그 방정식은 $z = \sqrt{3}\,x$이다. 이 평면의 법선(normal) $-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$는 $\mathbf{k}$와 각 $\arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$를 이룬다.

따라서 Q는 평면 $z = \sqrt{3}\,x$ 위에서 중심이 O이고 반지름이 3인 원을 따라 움직인다. 이 평면은 y축을 포함하며 P가 그리는 원의 평면과 60° 기울어져 있다. Q 역시 각속력이 1(속력 3)이고, $\mathbf{a}$의 방향에서 $\mathbf{j}$ 쪽으로 회전하며 한 바퀴를 돈다. 그리고 그 위상(phase)은 항상 P보다 $\frac{1}{4}\pi$만큼 앞선다. 즉 $t = 0$일 때 Q는 $\mathbf{a}$로부터 각 $\frac{1}{4}\pi$인 위치, 곧 $\frac{3}{2\sqrt{2}}(1,\, 2,\, \sqrt{3})$에 있다.

소문항 (ii)

$|\mathbf{p}| = 1$이고 $|\mathbf{q}| = 3$이므로

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{3} = \frac{\frac{3}{2}\cos t\cos s + 3\sin t\sin s}{3} = \tfrac{1}{2}\cos t\cos s + \sin t\sin s,$$

이다. 여기서 $s = t + \frac{1}{4}\pi$이다. $t + s = 2t + \frac{1}{4}\pi$, $s - t = \frac{1}{4}\pi$로 곱을 합으로 바꾸는 공식을 쓰면

$$\cos t\cos s = \tfrac{1}{2}[\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) + \cos\tfrac{1}{4}\pi],$$
$$\sin t\sin s = \tfrac{1}{2}[\cos\tfrac{1}{4}\pi - \cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi)].$$

$C = \cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$로 놓고 $\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$를 이용하면

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{\sqrt{2}}{2}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - C)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{8} + \tfrac{\sqrt{2}}{4} - \tfrac{1}{4}C = \tfrac{3\sqrt{2}}{8} - \tfrac{1}{4}\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi),\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

> **생각해 보기** $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$를 $\cos\theta$에 대한 조건으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

코사인은 $[0, \pi]$에서 순감소(strictly decreasing)하고, θ와 $\frac{1}{4}\pi$는 모두 이 구간에 속하므로

$$\theta \geq \tfrac{1}{4}\pi \iff \cos\theta \leq \cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{4\sqrt{2}}{8}.$$

소문항 (ii)에 의해 이는

$$\tfrac{3\sqrt{2}}{8} - \tfrac{1}{4}\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) \leq \tfrac{4\sqrt{2}}{8} \iff \cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) \geq -\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

와 같다. $u = 2t + \frac{1}{4}\pi$라 하자. t가 $[0, 2\pi]$를 움직이면 u는 길이가 4π인 구간 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi]$를 움직인다. 이는 정확히 $\cos u$의 두 주기이다. 한 주기 안에서 $\cos u < -\frac{\sqrt{2}}{2}$가 되는 곳은 정확

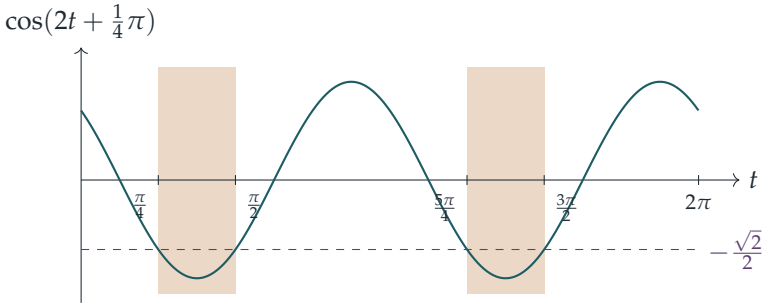
히 길이가 $\frac{1}{2}\pi$인 열린구간(2π를 법으로 하여 $\frac{3}{4}\pi$와 $\frac{5}{4}\pi$ 사이)이다. 여기서 조건을 만족하지 않는 값은

$$u \in (\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi) \cup (\tfrac{11}{4}\pi, \tfrac{13}{4}\pi) \iff t \in (\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{3}{2}\pi),$$

이고, 각 구간의 길이는 t로 따져 $\frac{1}{4}\pi$이다. 따라서 $\theta < \frac{1}{4}\pi$인 시간은 모두 합하여 $\frac{1}{2}\pi$이고, $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$인 전체 시간은

$$2\pi - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3}{2}\pi,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.



음영으로 칠한 띠는 곡선이 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 아래로 내려가는 곳, 즉 $\theta < \frac{1}{4}\pi$인 곳이다.

검산

- $t = 0$일 때: $\mathbf{p} = \mathbf{i}$이고 $\mathbf{q} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k})$이므로 직접 계산하면 $\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$이다. 공식으로는 $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$이다. 두 값이 일치한다.
- $\cos\theta$는 $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \approx 0.280$과 $\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.780$ 사이에 있으므로 θ는 결코 0이 되지 않는다. 이는 이치에 맞다. $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$가 평행할 수 있는 곳은 두 평면이 만나는 y축 위뿐인데, P가 그 축 위에 있는 것은 $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$일 때이고 Q가 그 축 위에 있는 것은 $t = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$일 때이기 때문이다.
- $[0, 2\pi]$에서 t를 이백만 개의 점으로 표본 추출하여 벡터로부터 θ를 직접 계산하면, $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$인 전체 시간은 4.712389로 나오며 이는 $\frac{3}{2}\pi \approx 4.712389$와 일치한다.

흔한 실수

- $|\mathbf{p}||\mathbf{q}| = 3$으로 나누는 것을 잊거나, $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$의 계수가 다르다는 이유로 $|\mathbf{q}|$가 변한다고 생각하는 것.
- 부등호 방향을 뒤집는 것: 코사인은 $[0, \pi]$에서 감소하므로 $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$는 $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$를 뜻한다.

- $\cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$의 한 주기만 세는 것: $2t$ 때문에 t가 한 바퀴 도는 동안 이 함수는 두 바퀴를 돈다.

STEP 너머

원점을 중심으로 하는 원은 모두 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$이고 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$인 $\cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}$ 꼴로 쓸 수 있다. 이 조건들을 없애면 타원(ellipse)을 얻으며, 일반적으로는 선형사상(linear map)에 의한 단위원(unit circle)의 상을 얻는다. 곡선을 이런 방식으로 이해하고, 움직이는 벡터 사이의 각을 스칼라곱으로 재는 것은 대학 1학년에서 만나는 선형대수(linear algebra)와 벡터 미적분(vector calculus)의 출발점이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이러한 아이디어를 명료하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.