풀이

STEP II 2005, 문제 6

순수수학 • 이항급수의 합

> **STEP II 2005, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q6

핵심 아이디어

여기 나오는 합은 모두 멱급수(power series)에 특정한 x 값을 대입한 것이므로, 각 합이 어떤 함수에서 나왔는지 알아보는 것이 관건이다. 소문항 (i)에서는 n과 n^2을 1, $n+1$, $(n+1)(n+2)$의 결합으로 다시 쓰는 것이 요령인데, 이들은 바로 앞에서 적어 둔 계수(coefficient)들이다. 소문항 (ii)에서는 $(1-x)^{-1/2}$의 계수와 $(1-x)^{-3/2}$의 계수 사이의 관계를 알아차리면 같은 아이디어가 그대로 통한다.

풀이

소문항 (i)

음의 정수 지수에 대한 이항정리(binomial theorem)에 의해 ($|x|<1$에서 성립), $n \geq 0$에 대하여 x^n의 계수는 다음과 같다.

$$(1-x)^{-1}: \quad 1, \qquad (1-x)^{-2}: \quad n+1, \qquad (1-x)^{-3}: \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

예를 들어 $(1-x)^{-3}$의 계수는 $\dfrac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \dfrac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$이다.

첫 번째 합. $n=(n+1)-1$이므로 $|x|<1$에 대하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

(우변의 두 급수가 모두 수렴(converge)하므로 합을 이렇게 나누어도 된다.) $n=0$인 항은

0이므로 $x = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} = 4 - 2 = 2.$$

두 번째 합. n^2을 $(n+1)(n+2)$, $n+1$, 1의 결합으로 나타내고자 한다. $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$이므로

$$n^2 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1.$$

따라서 $|x| < 1$에 대하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x},$$

이다. 여기서 인수 2가 나타나는 것은 $(1-x)^{-3}$의 계수가 $(n+1)(n+2)$의 **절반**이기 때문이다. 이번에도 $n = 0$인 항은 사라지고, $x = \frac{1}{2}$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,2^{-n} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 2 = 6.$$

소문항 (ii)

지수가 $-\frac{1}{2}$인 이항정리에 의해 $(1-x)^{-1/2}$에서 x^n의 계수는

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n\,n!}.$$

? **생각해 보기** 홀수들의 곱을 어떻게 계승으로 바꿀 수 있을까?

빠진 짝수들을 채워 넣는다. $(2n)! = (1 \cdot 3 \cdots (2n-1))(2 \cdot 4 \cdots 2n)$이고 $2 \cdot 4 \cdots 2n = 2^n n!$이다. 그러므로 $1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$이고, 계수는

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2^n n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,\frac{1}{2^{2n}}.$$

이 식은 $n = 0$일 때도 성립하므로(빈 곱, $a_0 = 1$), $|x| < 1$에 대하여

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,\frac{x^n}{2^{2n}},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

첫 번째 합. 구하는 합은 $x = \frac{1}{3}$에서의 $\sum a_n x^n$이고, 이 값은 전개가 성립하는 구간 안에 있다. 따라서 그 값은

$$\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

두 번째 합. 이제 $\sum na_n x^n$이 필요하다. 소문항 (i)과 같은 방식으로, na_n을 이미 알고 있는 급수와 연결해 보자. 위와 똑같이 하면 $(1-x)^{-3/2}$에서 x^m의 계수는

$$b_m = \frac{3\cdot 5\cdots(2m+1)}{2^m\, m!} = (2m+1)\, a_m.$$

a_n의 공식으로부터 이웃한 계수의 비는 $a_n/a_{n-1} = \dfrac{(2n)(2n-1)}{n^2\cdot 4} = \dfrac{2n-1}{2n}$이므로, $n \geq 1$에 대하여

$$n\, a_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)\, a_{n-1} = \tfrac{1}{2}\, b_{n-1}.$$

따라서 $|x|<1$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-1} = \frac{x}{2}(1-x)^{-3/2}.$$

(같은 결과를 얻는 다른 방법으로, $(1-x)^{-1/2}$의 급수를 항별 미분(differentiate term by term)한 뒤 x를 곱해도 된다. 수렴 구간(interval of convergence) 안에서는 항별 미분이 허용된다.) $x=\frac{1}{3}$에서:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}\, 3^n} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

검산

- $\sum n2^{-n}$의 처음 몇 항은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\cdots$이며, 네 항까지 더하면 벌써 1.625이고 조금씩 2에 다가간다. $\sum n^2 2^{-n}$의 200항까지의 부분합(partial sum)은 소수점 아래 여러 자리까지 6과 일치한다.
- 수치로 보면 $\sqrt{6}/2 \approx 1.224745$이고 $\sqrt{6}/8 \approx 0.306186$이다. 소문항 (ii)의 두 급수의 부분합은 두 값과 소수점 아래 12자리까지 일치한다.
- 일반항을 간단히 확인해 보자. $n=1$이면 $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$인데, 이는 익숙한 전개 $(1-x)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$의 계수이다.

흔한 실수

- $(1-x)^{-3}$의 계수에서 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 실수. 이렇게 하면 $\sum n^2 2^{-n}$의 값으로 $8-12+2=-2$가 나오는데, 양수 항들의 합으로는 불가능한 값이다.
- $(1-x)^{-2}$의 급수를 계수 $n+1$이 아니라 n으로 시작하는 실수. 이 급수는 $1+2x+3x^2+\cdots$이다.
- 마지막 합에서 인수 x를 하나 잃어버리는 실수. $\sum na_n x^{n-1}$은 도함수이지만, 구하는 합은 $\sum na_n x^n$이다.

STEP 너머

여기서 사용한 조작(급수를 여러 조각으로 나누기, 항별 미분하기)이 정당한 것은 멱급수가 수렴 반지름(radius of convergence) 안에서 절대수렴(absolutely convergent)하고, 그 안에서 항별 미분이 가능하기 때문이다. 이를 엄밀하게 증명하는 것은 해석학(analysis) 첫 강좌의 표준적인 내용이다. 계수 $\binom{2n}{n}/4^n$은 확률에서도 등장하는데, 단순 무작위 행보(simple random walk)가 $2n$걸음 후에 출발점으로 돌아와 있을 확률이 바로 이것이다. 해석학에 관해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.