풀이

STEP II 2005, 문제 5

순수수학 • 내접원과 외접원

STEP II 2005, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q5

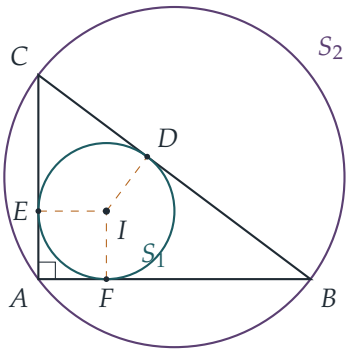
핵심 아이디어

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다. 이 사실을 각 꼭짓점에 적용하면 삼각형의 각 변이 두 개의 접선 길이로 나뉘고, 직각인 꼭짓점에서는 두 접선 길이가 정확히 r이 된다. 이로부터 r에 대한 공식이 거의 곧바로 나온다. 넓이의 비에 대해서는, 직각이므로 빗변이 S_2의 지름이 되고, 피타고라스(Pythagoras) 정리를 쓰면 모든 것을 $b+c$와 a만으로 나타낼 수 있다. 이것이 q가 등장하는 이유이다.

풀이

내접원의 반지름

S_1의 중심을 I라 하고, S_1이 BC, CA, AB에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자.



반지름은 접선과 수직으로 만나므로 $IE \perp AC$이고 $IF \perp AB$이다. 여기에 A에서의 직각을

함께 생각하면 $AEIF$는 이웃한 두 변이 $IE = IF = r$인 직사각형이므로 정사각형이고,

$$AE = AF = r.$$

원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $BF = BD$이고 $CE = CD$이다. 따라서

$$c = AF + FB = r + BD, \qquad b = AE + EC = r + CD, \qquad a = BD + DC.$$

앞의 두 식을 더하고 세 번째 식을 빼면

$$b + c - a = 2r + BD + CD - (BD + DC) = 2r,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

넓이의 비

$\angle BAC = 90°$이므로, 반원에 대한 원주각 정리(의 역)에 의해 BC는 외접원(circumcircle) S_2의 지름이다. 따라서 S_2의 반지름은 $\frac{1}{2}a$이고 넓이는 $\frac{1}{4}\pi a^2$이다.

S_1과 삼각형 사이의 영역은 삼각형에서 S_1의 원판을 제거한 것이므로, 그 넓이는 $\frac{1}{2}bc - \pi r^2$이다. 따라서

$$R = \frac{\frac{1}{2}bc - \pi r^2}{\frac{1}{4}\pi a^2}, \qquad \text{이므로} \qquad \pi R = \frac{2bc - 4\pi r^2}{a^2} = \frac{2bc}{a^2} - \pi\,\frac{(b + c - a)^2}{a^2},$$

이다. 여기서 $2r = b + c - a$를 이용하였다.

생각해 보기 $2bc/a^2$를 q만 포함하는 식으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

피타고라스 정리에 의해 $b^2 + c^2 = a^2$이므로 $2bc = (b + c)^2 - (b^2 + c^2) = (b + c)^2 - a^2$이다. 양변을 a^2으로 나누면

$$\frac{2bc}{a^2} = q^2 - 1, \qquad \frac{(b + c - a)^2}{a^2} = \left(\frac{b + c}{a} - 1\right)^2 = (q - 1)^2.$$

따라서

$$\begin{aligned} \pi R &= q^2 - 1 - \pi(q^2 - 2q + 1) \\ &= -(\pi - 1)q^2 + 2\pi q - (\pi + 1), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

R의 상계

우변은 최고차항의 계수가 음수 $-(\pi-1)$인 q에 대한 이차식이므로 완전제곱식(completing the square)으로 고친다.

$$\begin{aligned}\pi R &= -(\pi-1)\left(q^2 - \frac{2\pi}{\pi-1}\,q\right) - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2}{\pi-1} - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2-(\pi^2-1)}{\pi-1}\\ &= \frac{1}{\pi-1} - (\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2.\end{aligned}$$

$\pi-1>0$이므로 제곱항은 빼지는 항이 되고, 따라서 모든 실수 q에 대하여 $\pi R \le \dfrac{1}{\pi-1}$이다. 양변을 $\pi>0$으로 나누면

$$R \le \frac{1}{\pi(\pi-1)}.$$

이것이 이끌어 내라고 한 결과이다.

이 상계가 실제로는 도달되지 않는다는 점에 주목할 만하다. 등호가 성립하려면 $q = \pi/(\pi-1) \approx 1.467$이어야 하지만, 직각삼각형에서는 $(b+c)^2 = a^2+2bc \le a^2+(b^2+c^2) = 2a^2$이므로(산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $2bc \le b^2+c^2$) $q \le \sqrt{2} \approx 1.414$이다. 가능한 가장 큰 R는 직각이등변삼각형, 즉 $q=\sqrt{2}$일 때 나오며, 이때 $R = (2\sqrt{2}\,\pi - 3\pi + 1)/\pi \approx 0.1467$로 상계 $1/(\pi(\pi-1)) \approx 0.1486$보다 약간 작다.

검산

3–4–5 삼각형($b=4$, $c=3$, $a=5$)에 대해 공식은 $r=1$을 주는데, 실제로 넓이 6을 반둘레 6으로 나누면 1이 되어 잘 알려진 공식 $r = \text{넓이}/s$와 일치한다. 그러면 $R = (6-\pi)/(\frac{25}{4}\pi) \approx 0.14558$이고, 이차식에 $q=1.4$를 대입해도 같은 값이 나온다. 직각삼각형 10^5개를 무작위로 시험해 본 결과 πR에 대한 항등식이 매번 성립하였고, 0.14674보다 큰 R는 하나도 없어서 상계 0.14863과 부합하였다.

흔한 실수

- S_2의 반지름이 a가 아니라 $\frac{1}{2}a$임을 잊는 것: 빗변은 **지름**이다.
- $b^2+c^2=a^2$을 이용해 $2bc = (b+c)^2 - a^2$으로 쓰지 않고 $2bc/a^2$을 직접 전개하려 하는 것.
- $q = \pi/(\pi-1)$이 실제로 가능한 값인지 확인하지 않고 상계에 도달한다고 주장하는 것.

실제로는 도달하지 않는다. 다만 문제는 부등식만을 요구한다.

STEP 너머

일반적인 삼각형의 내접원(incircle)과 외접원은 두 중심 사이의 거리 d에 대한 오일러(Euler)의 공식 $d^2 = R_2(R_2 - 2r)$로 서로 연결되어 있다. 여기서 R_2는 외접원의 반지름이다. 이 공식으로부터 $R_2 \geq 2r$이 나오며, 등호는 정삼각형일 때만 성립한다. 이와 같은 결과, 그리고 도형들의 모임에서 어떤 비를 최적화한다는 발상은 기하 부등식(geometric inequalities) 연구로 이어진다. 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 다음 단계로 삼기에 훌륭한 책이며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(무료, CC BY)에는 STEP 형식의 연습 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.