풀이

STEP II 2005, 문제 4

순수수학 • 역탄젠트 항등식

> **STEP II 2005, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q4

핵심 아이디어

역탄젠트(inverse tangent)의 합은 양변에 탄젠트를 취한 뒤 $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$를 이용하여 다룬다. 조건 $bc = a^2 + 1$은 바로 분모가 분자와 맞아떨어지게 인수분해(factorise)되도록 해 주는 조건이다. 그다음부터 이 문제는 구조에 관한 문제이다. 첫 번째 결과는 하나의 역탄젠트를 두 개로 쪼개는 규칙이고, 네 항짜리 항등식은 이 규칙을 두 번, 즉 트리(tree)의 각 층에서 한 번씩 적용한 것이다. 수치 부분에서는 거꾸로 거슬러 올라가서 어떤 쪼개기가 네 수를 만들어 냈는지 찾는다.

풀이

첫 번째 항등식

$A = \arctan\frac{1}{a+b}$, $B = \arctan\frac{1}{a+c}$라 하자. $a, b, c > 0$이므로 $\frac{1}{a+b}$와 $\frac{1}{a+c}$는 모두 양수이고, 따라서 $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$이며 $A + B \in (0, \pi)$이다. $bc = a^2 + 1$을 이용하면

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) - 1 &= a^2 + ab + ac + bc - 1 \\ &= 2a^2 + ab + ac = a(2a + b + c).\end{aligned}$$

따라서 덧셈정리(addition formula)에 의하여

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}}{1 - \dfrac{1}{(a+b)(a+c)}} = \frac{(a+c)+(a+b)}{(a+b)(a+c)-1} \\ &= \frac{2a+b+c}{a(2a+b+c)} = \frac{1}{a},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $2a+b+c>0$이므로 약분할 수 있다.

> **생각해 보기** $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$이면 정말로 $A+B=\arctan\frac{1}{a}$인가?

저절로 그렇게 되지는 않는다. tan는 주기(period)가 π이므로, $A+B$가 arctan의 치역(range)인 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에 속해야 한다. 우리는 $A+B\in(0,\pi)$임을 알고 있다. 또한 $(a+b)(a+c)-1=a(2a+b+c)>0$이므로 $\tan A\tan B<1$이고, 덧셈정리의 분모는 양수이다. 분자도 양수이므로 $\tan(A+B)>0$이고, 이로써 $A+B\in[\frac{\pi}{2},\pi)$인 경우는 배제된다. (실제로 $\tan(A+B)$는 $\frac{\pi}{2}$에서 정의되지 않고 $(\frac{\pi}{2},\pi)$에서는 음수이다.) 따라서 $A+B\in(0,\frac{\pi}{2})$이고, $\arctan\frac{1}{a}$는 이 구간에서 탄젠트 값이 $\frac{1}{a}$인 유일한 각이므로

$$\arctan\frac{1}{a+b}+\arctan\frac{1}{a+c}=\arctan\frac{1}{a}. \qquad \blacksquare$$

네 항짜리 항등식

첫 번째 항등식을 세 번 적용한다. 매번 관련된 세 수는 모두 양수이다.

- $a=p+q, b=s, c=t$로 두면 조건은 $st=(p+q)^2+1$이고 이는 주어진 것이므로
$$\arctan\frac{1}{p+q+s}+\arctan\frac{1}{p+q+t}=\arctan\frac{1}{p+q}.$$
- $a=p+r, b=u, c=v$로 두면 조건 $uv=(p+r)^2+1$이 주어져 있으므로
$$\arctan\frac{1}{p+r+u}+\arctan\frac{1}{p+r+v}=\arctan\frac{1}{p+r}.$$
- $a=p, b=q, c=r$로 두면 조건 $qr=p^2+1$이 주어져 있으므로
$$\arctan\frac{1}{p+q}+\arctan\frac{1}{p+r}=\arctan\frac{1}{p}.$$

처음 두 줄을 더하고 세 번째 줄을 이용하면 네 역탄젠트의 합은 $\arctan\frac{1}{p}$이다. 이것이 보이려던 것이다. $\blacksquare$

수치 항등식

$p=7$이어야 하므로 $qr=50$이다. q와 r를 추측하기보다는 네 수에서 거꾸로 거슬러 올라가자. 13과 21이 첫 번째 항등식을 한 번 적용할 때의 쌍 $a+b, a+c$라면 $b=13-a$, $c=21-a$이고, $bc=a^2+1$로부터

$$(13-a)(21-a)=a^2+1 \iff 273-34a=1 \iff a=8.$$

마찬가지로 82와 187이 한 쌍이라면

$$(82-a)(187-a)=a^2+1 \iff 15334-269a=1 \iff a=57.$$

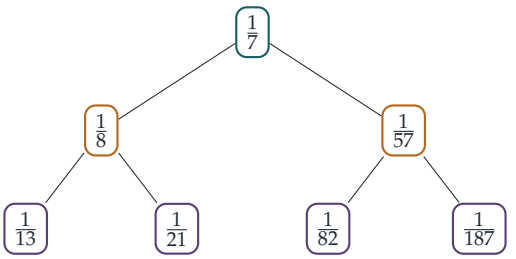
따라서 $p+q=8$, $p+r=57$, 즉 $q=1$, $r=50$으로 시도해 보자. 그러면 $s=13-8=5$, $t=21-8=13$, $u=82-57=25$, $v=187-57=130$이다. 일곱 수는 모두 양수이고, 세 조건이 모두 성립한다.

$$qr=50=7^2+1, \qquad st=65=8^2+1, \qquad uv=3250=57^2+1.$$

이 값들에 대하여 $p+q+s=13$, $p+q+t=21$, $p+r+u=82$, $p+r+v=187$이므로 네 항짜리 항등식에 의하여

$$\arctan\frac{1}{13}+\arctan\frac{1}{21}+\arctan\frac{1}{82}+\arctan\frac{1}{187}=\arctan\frac{1}{7}. \qquad \blacksquare$$

아래 트리는 $\arctan\frac{1}{7}$이 어떻게 쪼개지는지 보여 준다.



각 노드의 역탄젠트는 자식 노드들의 역탄젠트의 합이다: $1\cdot 50=7^2+1$, $5\cdot 13=8^2+1$, $25\cdot 130=57^2+1$.

검산

- 수치적으로, 마지막 항등식의 양변은 모두 0.1418970546…이다.
- 분수로 정확히 계산하면, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{21}$에 대한 $\tan(A+B)$는 $\frac{34}{272}=\frac{1}{8}$이고, $\frac{1}{82}$, $\frac{1}{187}$에 대해서는 $\frac{269}{15333}=\frac{1}{57}$이며, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{57}$에 대해서는 $\frac{65}{455}=\frac{1}{7}$이다.
- 첫 번째 항등식의 특수한 경우: $a=1$, $b=1$, $c=2$로 두면 유명한 등식 $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$를 얻는다.

흔한 실수

- $A+B$가 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에 속하는지 확인하지 않고 $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$로부터 $A+B=\arctan\frac{1}{a}$라고 결론 내리는 것.
- 50, 65, 3250의 인수분해를 무작정 뒤지는 것. 쌍 13, 21에서 거꾸로 거슬러 올라가면 한 줄 만에 $a=8$을 찾을 수 있다.

STEP 너머

이와 같은 항등식은 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$와 같은 마친(Machin)형 공식의 바탕이 된다. 이런 공식은 수 세기 동안 손으로 π를 계산하는 데 쓰였는데, x가 작을 때 $\arctan x$의 급수(series)가 빠르게 수렴하기 때문이다. 이를 가장 깔끔하게 이해하는 방법은 복소수(complex numbers)를 통하는 것이다. $\arctan\frac{1}{n}$은 $n + \mathrm{i}$의 편각(argument)이므로, 역탄젠트를 더하는 것은 가우스 정수(Gaussian integers)를 곱하는 것에 대응하고, 조건 $bc = a^2 + 1$은 사실 $a^2 + 1 = (a + \mathrm{i})(a - \mathrm{i})$라는 인수분해가 모습을 바꾼 것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 전개하며, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 두 제곱수의 합을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.