풀이

STEP II 2005, 문제 3

순수수학 • 부분적분

> **STEP II 2005, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q3

핵심 아이디어

먼저 미분(differentiate)한다. $\sin x - x\cos x$의 도함수(derivative)는 부호가 한눈에 보이는 간단한 식으로 정리되고, 이것 하나로 그래프의 개형과 y의 범위를 한꺼번에 얻는다. 두 적분은 평범한 부분적분(integration by parts)으로 계산하며, 제곱항은 배각 공식(double-angle formula)을 쓰면 수월하다. 마지막 부등식은 두 적분을 비교하여 얻는다. 0과 1 사이의 수는 자기 자신의 제곱보다 작지 않다.

풀이

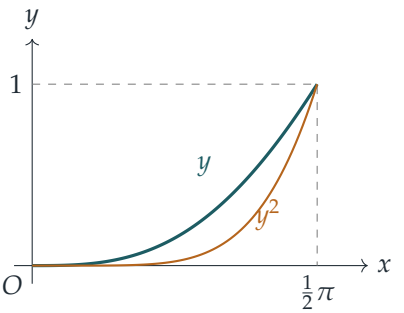
개형과 범위

곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

$0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$에서 x와 $\sin x$가 모두 양수이므로 y는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 최솟값은 $y(0) = 0 - 0 = 0$이고 최댓값은 $y(\frac{1}{2}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\pi \cdot 0 = 1$이다. 그러므로 $0 \leq y \leq 1$이고, 실제로 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서는 $0 < y < 1$이다.

모양을 보면, $(0, \frac{1}{2}\pi]$에서 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \sin x + x\cos x > 0$이므로 곡선은 구간 전체에서 아래로 볼록하다. 원점에서 기울기는 0이다. 매클로린 급수(Maclaurin series)를 이용하면 $y = (x - \frac{1}{6}x^3) - x(1 - \frac{1}{2}x^2) + \cdots = \frac{1}{3}x^3 + \cdots$이므로, 곡선은 삼차함수처럼 원점에서 매우 평평하게 출발한다. $x = \frac{1}{2}\pi$에서 기울기는 $\frac{1}{2}\pi$이다.



마지막 부분의 열쇠가 되므로 호박색 곡선 y^2도 함께 나타내었다.

소문항 (i)

$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$가 필요하다. $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분하면

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - 1.$$

$\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$이므로

$$\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = 1 - (\tfrac{1}{2}\pi - 1) = 2 - \frac{\pi}{2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

전개하면

$$y^2 = \sin^2 x - 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x = \sin^2 x - x\sin 2x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2\cos 2x,$$

이다. 여기서 $2\sin x\cos x = \sin 2x$와 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$를 이용하였다. 네 항을 차례로 계산한다.

먼저 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$이고 $\sin 2x$는 양 끝에서 모두 0이 되므로

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

다음으로 $u = x$, $\mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분하며 $\cos\pi = -1$을 이용하면

$$\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \Big[-\tfrac{1}{2}x\cos 2x\Big]_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

세 번째로 $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(\frac{1}{2}\pi)^3 = \dfrac{\pi^3}{48}$이다.

마지막으로 $u = x^2$, $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분한다. 경계항 $[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x]_0^{\pi/2}$는 0이고, 남는 적분은 방금 구한 것이다.

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x = 0 - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4},$$

따라서 마지막 항의 기여는 $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{8}\pi$이다.

네 항을 더하면

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

결론 이끌어내기

생각해 보기 두 적분에서 어떻게 π에 관한 부등식이 나올 수 있을까?

피적분함수를 비교한다. $0 \le y \le 1$이므로 구간 전체에서 $y - y^2 = y(1-y) \ge 0$이다. 더 나아가 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $0 < y < 1$임을 보였으므로 그 구간에서 $y(1-y) > 0$이다. 음이 아니고 어떤 열린구간에서 양수인 연속함수(continuous function)의 적분은 양수이다. 그러므로

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2}.$$

양변에 48을 곱하면(양수이므로 부등호의 방향은 그대로이다)

$$\pi^3 - 6\pi < 96 - 24\pi, \qquad \text{따라서} \qquad \pi^3 + 18\pi < 96.$$

이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 수치로 계산하면 $2 - \frac{1}{2}\pi \approx 0.4292$, $\frac{1}{48}\pi^3 - \frac{1}{8}\pi \approx 0.2533$이다. 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용해도 소수점 아래 열두 자리까지 같은 값이 나온다. $0 \le y \le 1$이므로 당연히 두 값 모두 0과 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ 사이에 있다.
- y 아래에 놓인 y^2의 그림에서 짐작할 수 있듯이, 두 번째 적분이 첫 번째 적분보다 작다.
- $\pi \approx 3.1416$으로 두면 $\pi^3 + 18\pi \approx 31.006 + 56.549 = 87.55$로, 96보다 넉넉히 작다.

흔한 실수

- $\int x \sin 2x\,\mathrm{d}x$에서 경계항의 부호를 틀리는 경우. $x = \frac{1}{2}\pi$에서 $\cos 2x = \cos \pi = -1$이므로 $-\frac{1}{2}x \cos 2x$는 $+\frac{1}{4}\pi$이다.

- 마지막 단계에서 $\leq$만 주장하는 경우. 등호 없는 부등식을 얻으려면 ≥ 0만으로는 부족하고, 어딘가에서 $y(1-y) > 0$임을 보여야 한다.
- $y \leq 1$인 이유를 밝히지 않는 경우. y가 증가한다는 사실 없이 $y(\frac{1}{2}\pi) = 1$만 아는 것으로는 충분하지 않다.

STEP 너머

마지막 단계는 큰 아이디어의 작은 예이다. 함수 사이의 부등식을 적분하면 수 사이의 부등식이 되고, 함수를 잘 고르면 π와 같은 상수를 가둘 수 있다. 같은 전략으로 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > 0$에서 $\frac{22}{7} > \pi$를 이끌어내는 유명한 증명이 나오며, 더 본격적으로는 π가 무리수(irrational)라는 Niven의 증명도 나온다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 음이 아니고 어딘가에서 양수인 연속함수의 적분이 양수라는 사실을 엄밀하게 증명하게 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 증명이 제대로 이루어지는 모습을 친절하게 보여 주는 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.