풀이

STEP II 2005, 문제 11

역학 • 경사면 위의 마찰

STEP II 2005, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

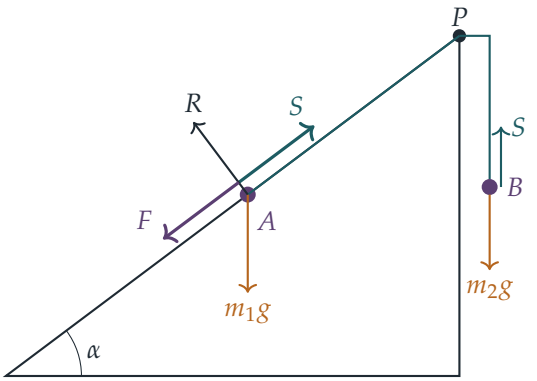
step.maths.org/questions/05-s2-q11

핵심 아이디어

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$이므로 3–4–5 삼각형이 만들어지고, 따라서 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이다. 그러면 A에 작용하는 모든 힘이 $m_1 g$의 깔끔한 배수가 된다. 이제 A의 운동은 가속도가 일정한 세 단계로 나뉜다. 줄에 끌려 올라가는 단계, 줄 없이 미끄러져 올라가는 단계, 그리고 다시 미끄러져 내려오는 단계이다. 마지막 두 단계 사이에서 마찰력의 방향이 바뀌는데, 바로 여기에 이 문제의 미묘한 점이 숨어 있다.

풀이

A와 B를 입자(particle)로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 도르래(pulley)를 매끄러운 것으로 모형화한다. 그러면 장력(tension) S는 양쪽에서 같다. $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$라 하면 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이다.



줄이 팽팽할 때의 가속도

경사면에 수직인 방향으로는 A의 가속도가 없으므로

$R = m_1 g\cos\alpha = \frac{4}{5}m_1 g,$ 이고 최대 정지마찰력(limiting friction)은 $\mu R = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}m_1 g = \frac{2}{5}m_1 g.$

먼저 계가 실제로 움직이는지 확인한다. B가 내려간다면 A는 경사면을 따라 올라가게 되고, 이를 방해하는 힘은 무게의 경사면 방향 성분 $\frac{3}{5}m_1 g$와 크기가 최대 $\frac{2}{5}m_1 g$인 마찰력(friction)이다. 합하면 최대 $m_1 g$이다. 반대 방향으로 끄는 힘은 B의 무게 $m_2 g$이고 $m_2 > m_1$이므로, 마찰력은 계를 붙잡아 둘 수 없다. 따라서 B는 내려가고 A는 경사면을 따라 올라가며, A에 작용하는 마찰력은 최대 정지마찰력에 도달한 상태로 경사면 아래쪽을 향한다.

공통의 가속도(acceleration)를 a라 하자. A(경사면 위쪽 방향)와 B(아래쪽 방향)에 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$m_1 a = S - \tfrac{3}{5}m_1 g - \tfrac{2}{5}m_1 g = S - m_1 g,$$
$$m_2 a = m_2 g - S.$$

두 식을 더하면 $(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$이므로

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 앞으로는 $a = kg$로 쓰는 것이 편리하다. 여기서 $k = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$이고 $0 < k < 1$이다.

최고 높이에 도달하는 시각

시각 T에 A는 속력 $u = aT = kgT$로 경사면을 따라 올라가고 있으며, 그때까지 $\frac{1}{2}kgT^2$만큼 이동했다.

줄이 끊어지면 S는 사라진다. A는 여전히 경사면을 따라 올라가고 있으므로 마찰력은 여전히 경사면 아래쪽으로 작용하고, 경사면 아래쪽 방향의 힘의 합은 $\frac{3}{5}m_1 g + \frac{2}{5}m_1 g = m_1 g$이다. 따라서 A는 정확히 g의 크기로 감속(decelerate)하며, 추가로

$$\frac{u}{g} = kT.$$

의 시간이 지난 뒤 멈춘다. 그러므로 A는 놓은 지

$$T + kT = (1 + k)T = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, T$$

후에 최고 높이에 도달한다. (A는 도르래에 결코 닿지 않는다고 주어졌으므로, 이 단계가 중간에 끊기지 않는다.) 이 단계 동안 A는 $\dfrac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}k^2 gT^2$만큼 더 이동하므로, 놓은 지점에서

부터 경사면을 따라 올라간 총거리는

$$d = \tfrac{1}{2}kgT^2 + \tfrac{1}{2}k^2gT^2 = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2.$$

? 생각해 보기 A가 멈춘 뒤에 그 자리에 머무르는가?

마찰력이 A를 붙잡아 둘 수 있을 때에만 머무른다. 무게의 경사면 아래쪽 방향 성분은 $\frac{3}{5}m_1g$인 반면, 마찰력은 최대 $\frac{2}{5}m_1g$까지만 낼 수 있다. 같은 말로, $\tan\alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \mu$이다. 따라서 A는 다시 미끄러져 내려오고, 이제 마찰력은 경사면 **위쪽**으로 작용한다. 경사면 아래쪽 방향의 알짜힘은 $\frac{3}{5}m_1g - \frac{2}{5}m_1g = \frac{1}{5}m_1g$이므로, A는 경사면을 따라 $\frac{1}{5}g$의 가속도로 내려온다. 이는 올라갈 때의 감속보다 훨씬 완만하다.

질량의 비

최고점에서 정지 상태로 출발한 A가 거리 d를 미끄러져 놓은 지점까지 돌아오는 데 걸리는 시간을 t_d라 하면

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}g\,t_d^2 = d = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2, \qquad \text{따라서} \qquad t_d^2 = 5k(1+k)T^2.$$

t_d가 최고 높이에 도달하는 시각 $(1+k)T$와 같다고 주어졌다. 양변을 제곱하면 이는

$$(1+k)^2T^2 = 5k(1+k)T^2.$$

을 뜻한다. 양수인 $(1+k)T^2$로 나누면 $1+k = 5k$이므로 $k = \frac{1}{4}$이다. T가 약분되었다는 점에 주목하자. 이 때문에 줄이 언제 끊어지든 등식이 성립하며, k가 유일하게 결정된다. 그러면

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{1}{4} \iff 4m_2 - 4m_1 = m_2 + m_1 \iff 3m_2 = 5m_1,$$

이므로

$$m_1 : m_2 = 3 : 5.$$

검산

- 극한의 경우(limiting cases): $m_2 \to m_1$이면 $k \to 0$이고 최고 높이에 도달하는 시각은 T에 가까워진다(잃을 속력이 거의 없다). $m_2 \gg m_1$이면 $k \to 1$이고 A는 끌려간 시간만큼 더 관성으로 올라간다. 속력 gT에 도달한 뒤 g로 감속하므로 예상대로이다.
- $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $T = 1\,\mathrm{s}$이면 $k = \frac{1}{4}$이다. 최고 높이는 1.25 s에 도달하고, $d = \frac{5}{32}g$이며, 내려오는 데 $\sqrt{2d/(g/5)} = \sqrt{25/16} = 1.25\,\mathrm{s}$가 걸린다. 세 단계 전체를 단계별로 수치 시뮬레이션해 보았더니, 여러 T 값에 대해 두 시간 모두 1.250 s로 나왔다.

흔한 실수

- A가 다시 미끄러져 내려오기 시작할 때 마찰력의 방향이 바뀐다는 것을 잊고, 내려오는 가속도로 $\frac{1}{5}g$ 대신 g(또는 $\frac{3}{5}g$)를 쓰는 실수.
- 내려오는 거리를 놓은 지점이 아니라 줄이 끊어진 지점부터만 재는 실수.
- A가 실제로 다시 미끄러져 내려오는지 확인하지 않는 실수. 이를 위해서는 $\tan\alpha > \mu$이어야 한다.

STEP 너머

마찰력은 운동 상태에 따라 달라지는 힘의 대표적인 예이다. 속도에 따라 방향이 바뀌고, 물체가 정지해 있는 동안에는 크기에 상한이 있다. 이 때문에 운동은 구간별로 나뉘며 각 단계마다 운동 방정식이 달라진다. 같은 아이디어가 삐걱거리는 경첩이나 지진 단층 같은 스틱-슬립(stick–slip) 현상을 지배한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 물리학이 요구하는 엄밀함으로 마찰력과 구속된 운동을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.