풀이

STEP II 2005, 문제 10

역학 • 충돌하는 포물체

> **STEP II 2005, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q10

핵심 아이디어

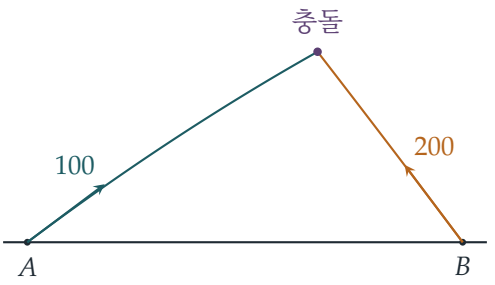
두 미사일은 모두 포물체(projectile)이므로 각 미사일이 임의의 시각에 어디에 있는지 식으로 쓸 수 있다. 충돌한다는 것은 두 위치가 **같은** 순간에 일치한다는 뜻이며, 이로부터 충돌 시각과 T라는 두 미지수에 대한 두 방정식(수평 방향과 연직 방향)을 얻는다. 수평 방향의 방정식은 일차식이므로 이를 이용해 충돌 시각을 소거할 수 있고, 그러면 연직 방향의 방정식은 T에 대한 이차방정식(quadratic)이 된다. 그다음에는 어느 근이 물리적으로 타당한지 판단해야 한다.

풀이

식 세우기

두 미사일을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자로 모형화한다. A를 원점으로, AB 방향을 x축으로(따라서 B는 $x = 180$에 있다), 연직 위쪽을 y축으로 잡는다. 시간 t는 첫 번째 미사일을 발사한 순간부터 초 단위로 잰다.

첫 번째 미사일의 경우 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$에서 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이므로 초기 속도의 성분은 $100 \cdot \frac{4}{5} = 80$과 $100 \cdot \frac{3}{5} = 60$이다. 두 번째 미사일의 경우 $\sin\beta = \frac{4}{5}$에서 $\cos\beta = \frac{3}{5}$이다. 이 미사일은 A 쪽으로 날아가므로 성분은 $-200 \cdot \frac{3}{5} = -120$과 $200 \cdot \frac{4}{5} = 160$이다.



$s = t - T$를 두 번째 미사일을 발사한 뒤 흐른 시간이라 하자. 그러면 두 미사일이 모두 날고 있는 동안

$$\begin{aligned} &\text{첫 번째 미사일:} \quad x = 80t, && y = 60t - 5t^2, \\ &\text{두 번째 미사일:} \quad x = 180 - 120s, && y = 160s - 5s^2. \end{aligned}$$

충돌

충돌하는 순간 x좌표가 일치하므로

$$80t = 180 - 120(t - T) \quad \Longrightarrow \quad 200t = 180 + 120T \quad \Longrightarrow \quad t = 0.9 + 0.6T,$$

이고, 따라서 $s = t - T = 0.9 - 0.4T$이다.

y좌표도 일치한다. 즉 $60t - 5t^2 = 160s - 5s^2$이므로

$$60t - 160s = 5(t^2 - s^2) = 5(t - s)(t + s) = 5T(t + s),$$

이다. 여기서 $t - s = T$를 이용하였다. t와 s에 대한 식을 대입하면

$$\begin{aligned} 60t - 160s &= 60(0.9 + 0.6T) - 160(0.9 - 0.4T) = 100T - 90, \\ 5T(t + s) &= 5T(1.8 + 0.2T) = 9T + T^2. \end{aligned}$$

이 둘을 같다고 놓으면

$$T^2 - 91T + 90 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (T - 1)(T - 90) = 0,$$

이므로 $T = 1$ 또는 $T = 90$이다.

생각해 보기 두 근 모두 방정식을 만족한다. 왜 $T = 90$은 답이 될 수 없을까?

$T = 90$이면 $s = 0.9 - 36 = -35.1$이 되는데, 이는 "충돌"이 두 번째 미사일을 발사하기 35.1초 전에 일어난다는 뜻이다. (게다가 그 위치는 지면보다 한참 아래이다. 방정식은 실제 비행 구간을 넘어 연장된 포물선을 나타내기 때문이다.) 따라서 이 근은 물리적으로 의미가

없다. 어차피 첫 번째 미사일은 $2 \cdot 60/10 = 12$초 동안만 공중에 있으므로 그보다 훨씬 전에 땅에 떨어졌을 것이다.

$T = 1$이면 $t = 1.5$, $s = 0.5 > 0$이므로 두 미사일이 모두 날고 있다. 높이는 $60(1.5) - 5(1.5)^2 = 78.75$와 $160(0.5) - 5(0.5)^2 = 78.75$로 둘 다 양수이고, 두 미사일 모두 $x = 120$에 있다. 따라서

$$T = 1 \text{ 초}.$$

검산

$T = 1$을 다시 대입하면 $t = 1.5\,\mathrm{s}$에서 두 미사일은 모두 $(120, 78.75)$ 미터 위치에 있으며, 이는 정확한 분수 계산으로 확인하였다. 발사 간격을 $1\,\mathrm{s}$로 두고 두 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보면, 두 미사일 사이의 거리가 $t = 1.5\,\mathrm{s}$에서 사실상 0으로 줄어든다. 타당성 점검으로, 충돌 위치 $x = 120$은 A와 B 사이에 있고, 그 지점에서 첫 번째 미사일의 연직 속도는 $60 - 15 = 45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이므로 첫 번째 미사일은 아직 올라가는 중이다.

흔한 실수

- 두 미사일에 같은 시간 변수를 쓰는 것. 두 번째 미사일이 날아간 시간은 t가 아니라 $t - T$이다.
- 두 번째 미사일이 x축의 음의 방향으로 움직인다는 것을 잊는 것.
- $t - T > 0$인지 확인하지 않고 $T = 90$을 답으로 남겨 두는 것.

STEP 너머

이 문제를 더 깔끔하게 보는 방법이 있다. 두 미사일의 가속도는 똑같이 g이므로, 둘 다 날고 있는 동안 **상대** 속도(relative velocity)는 일정하고, 각 미사일에서 보면 상대 미사일은 직선으로 움직인다. 충돌은 정확히 그 상대 속도가 시각 T에 두 미사일을 잇는 직선 방향을 향할 때 일어나며, 이것을 식으로 쓰면 같은 이차방정식을 얻는다. 이처럼 자유 낙하 좌표계(freely falling frame)로 바꾸어 보는 것은 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)로 나아가는 첫걸음이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 비관성 좌표계(non-inertial frame)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.