풀이

STEP II 2005, 문제 1

순수수학 • 다항식과 정류점

> **STEP II 2005, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q1

핵심 아이디어

$P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 꼴의 함수를 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면 $(P'(x) - 2xP(x))\mathrm{e}^{-x^2}$을 얻는다. 그런데 e^{-x^2}은 결코 0이 되지 않으므로, 정류점(stationary point)은 정확히 다항식(polynomial) $P'(x) - 2xP(x)$의 실근(real root)이다. 따라서 두 번째 부분은 거꾸로 푸는 문제가 된다. 먼저 $P' - 2xP$가 어떤 다항식이 되기를 원하는지 정한 다음, 계수비교(comparing coefficients)를 통해 거슬러 올라가 P를 구한다.

풀이

첫 번째 부분

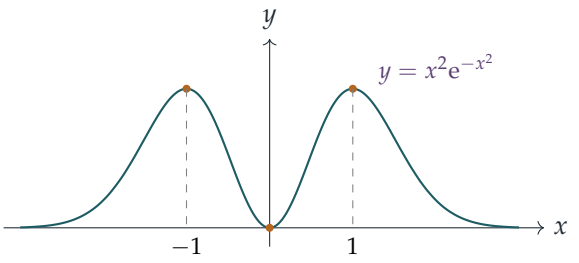
곱의 미분법에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + x^2 \cdot (-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$이므로, 이 값은 $x(1-x^2) = 0$일 때, 즉

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = -1.$$

에서 정확히 0이 된다.



그래프는 원점에서 극소(minimum)이고, $x = \pm 1$에서 높이 e^{-1}의 극대(maximum)를 가진다.

두 번째 부분

임의의 다항식 P에 대하여

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)e^{-x^2}\right) = \left(P'(x) - 2xP(x)\right)e^{-x^2},$$

이므로, 이번에도 $e^{-x^2} > 0$이기 때문에 도함수(derivative)는 정확히 $P'(x) - 2xP(x) = 0$인 곳에서 0이 된다. 첫 번째 부분도 이 틀에 들어맞는다. $P(x) = x^2$일 때 $P' - 2xP = -2x(x^2 - 1)$이었다. 따라서 다음을 목표로 한다.

$$P'(x) - 2xP(x) = -2x\left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - b^2\right), \qquad (*)$$

이 식의 실근은 $0, \pm a, \pm b$뿐이다. a와 b는 서로 다른 양수이므로 이들은 **서로 다른** 다섯 개의 값이다.

> **생각해 보기** P의 차수(degree)는 얼마여야 하며, 왜 짝수 차수의 항만 포함해야 할까?

P의 차수가 n이고 최고차항의 계수(leading coefficient)가 c이면, P'의 차수는 $n-1$이므로 $P' - 2xP$는 차수가 $n+1$이고 최고차항의 계수가 $-2c$이다. $(*)$의 우변은 차수가 5이고 최고차항의 계수가 -2이므로, $n = 4$, $c = 1$이어야 한다. 또한 우변은 기함수(odd function)이다. P가 우함수(even function)이면 P'과 $2xP$는 모두 기함수이므로, 다음과 같이 놓아 보는 것이 자연스럽다.

$$P(x) = x^4 + \beta x^2 + \gamma.$$

그러면 $P'(x) = 4x^3 + 2\beta x$이고

$$\begin{aligned} P'(x) - 2xP(x) &= 4x^3 + 2\beta x - 2x^5 - 2\beta x^3 - 2\gamma x \\ &= -2x^5 + (4 - 2\beta)x^3 + (2\beta - 2\gamma)x, \end{aligned}$$

한편 $(*)$의 우변을 전개하면

$$-2x^5 + 2\left(a^2 + b^2\right)x^3 - 2a^2b^2x.$$

이다. x^3과 x의 계수를 비교하면

$$\begin{aligned} 4-2\beta &= 2(a^2+b^2) &&\Longrightarrow \quad \beta = 2-a^2-b^2, \\ 2\beta-2\gamma &= -2a^2b^2 &&\Longrightarrow \quad \gamma = \beta + a^2b^2 = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2. \end{aligned}$$

따라서 조건을 만족하는 다항식의 한 예는 다음과 같다.

$$\boxed{P(x) = x^4 + (2-a^2-b^2)x^2 + a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2.}$$

이렇게 고르면 $(*)$가 항등식으로 성립하므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -2x(x^2-a^2)(x^2-b^2)\mathrm{e}^{-x^2},$$

이고, 이 값은 $x=0$, $x=\pm a$, $x=\pm b$에서 0이 되며, $\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$이므로 그 밖의 x 값에서는 0이 되지 않는다. P에 0이 아닌 상수를 곱한 것도 똑같이 조건을 만족한다.

검산

- $a=1, b=2$로 놓으면 $P(x) = x^4 - 3x^2 + 1$이고, $P' - 2xP = 4x^3 - 6x - 2x^5 + 6x^3 - 2x = -2x^5 + 10x^3 - 8x = -2x(x^2-1)(x^2-4)$이므로 요구한 대로이다.
- 수치적으로, $a=0.7$, $b=1.9$일 때 $P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$의 도함수는 $[-5,5]$에서 $x=0, \pm 0.7, \pm 1.9$ 근처에서만 부호가 바뀐다. 또한 무작위로 고른 수천 개의 (a,b,x)에서 공식이 맞음을 확인하였다.
- 직관적으로 $b\to 0$으로 보내면 $P \to x^4 + (2-a^2)x^2 + 2 - a^2$이고, 도함수는 $-2x^3(x^2-a^2)\mathrm{e}^{-x^2}$이 되어, 0과 $\pm b$에 있던 근들이 하나로 합쳐진다.

흔한 실수

- 연쇄법칙(chain rule)에서 나오는 인수를 빠뜨리는 것: e^{-x^2}의 도함수는 e^{-x^2}이 아니라 $-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$이다.
- 근이 다섯 개이니 P의 차수를 5로 짐작하는 것: $P\mathrm{e}^{-x^2}$을 미분하면 차수가 하나 올라가므로 P의 차수는 4이다.
- 다른 정류점이 없는 이유를 밝히지 않는 것: 이를 위해서는 $\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$이라는 사실과 5차식이 이 근들만 가진다는 사실이 필요하다.

STEP 너머

사상 $P \mapsto P' - 2xP$는 다항식 위의 선형 연산자(linear operator)이고, $(*)$를 푸는 것은 적분인자(integrating factor) e^{-x^2}을 이용해 1계 선형 미분방정식(first-order linear differential equation)을 푸는 것과 같다. H가 다항식일 때 $H(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 꼴의 함수들은 에르미트(Hermite) 다항식으로 이어지며, 이 다항식은 확률론(정규분포)과 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)에 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 적분인자와 에르미트 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.