풀이

STEP I 2005, 문제 9

역학 • 강체의 평형

> **STEP I 2005, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q9

핵심 아이디어

모든 것은 단 하나의 미지수, 즉 균일하지 않은 막대의 무게중심(centre of mass) G가 어디에 있는지에 달려 있다. 처음 두 설정은 각각 T를 그 위치로 나타내 주므로, 두 식을 같게 놓으면 G와 T가 함께 결정된다. 그다음 기울어진 설정은 전형적인 강체(rigid body) 문제이다. 미지의 접촉력들이 작용하는 점에 대해 모멘트(moment)를 잡은 뒤, 힘을 분해(resolve)한다.

풀이

막대는 강체이고 전체 무게 W가 무게중심 G에 작용하며, 줄은 가볍고 늘어나지 않는다고 모형화한다. $AG = x$라 하면 $GB = 3l - x$이다.

G 구하기와 $5T = 2W$ 보이기

양 끝에 줄을 매단 경우. B에 대한 모멘트를 잡으면 B에서의 미지의 장력(tension)이 사라진다.

$$T \cdot 3l = W(3l - x).$$

A에서 거리 l인 곳에 받침점, B에 줄이 있는 경우. 받침점(pivot)을 P라 하면 $PB = 2l$이다. P에 대한 모멘트를 잡으면 미지의 받침점 반력이 사라진다. B의 줄이 막대를 떠받치려면 G는 P에 대해 B 쪽에 있어야 하므로 $PG = x - l$이고

$$T \cdot 2l = W(x - l).$$

T를 소거하면(첫째 식에 2를, 둘째 식에 3을 곱해 비교한다)

$$2W(3l - x) = 3W(x - l) \quad \Longrightarrow \quad 9l = 5x \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}l.$$

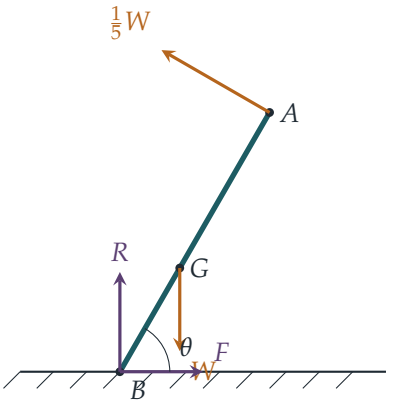
그러면 둘째 식에서 $2lT = W \cdot \frac{4}{5}l$이므로 $T = \frac{2}{5}W$, 즉

$$5T = 2W,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. $x = \frac{9}{5}l > l$이므로 G가 받침점 너머에 있다는 가정과도 맞는다. 따라서 G는 B에서 거리 $GB = 3l - \frac{9}{5}l = \frac{6}{5}l$인 곳에 있다.

바닥에 놓인 막대

이제 B는 거친 바닥 위에 있고, 막대는 수평과 각 θ를 이루며, A의 줄은 막대에 수직이고 장력은 $\frac{1}{2}T = \frac{1}{5}W$이다. B에는 위쪽으로 수직항력(normal reaction) R와 바닥을 따라 마찰력(friction) F가 작용한다.



B에 대한 모멘트. 이렇게 하면 R와 F가 사라진다. 줄의 힘은 B에서 거리 $3l$인 곳에서 막대에 수직으로 작용하므로 그 모멘트는 $\frac{1}{5}W \cdot 3l$이다. 무게는 막대를 따라 거리 $\frac{6}{5}l$인 곳에서 연직으로 작용하므로 B로부터의 수직 거리는 $\frac{6}{5}l\cos\theta$이다. 따라서

$$\tfrac{1}{5}W \cdot 3l = W \cdot \tfrac{6}{5}l\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta = \tfrac{1}{2},$$

이므로 $\theta = 60°$(즉 $\frac{\pi}{3}$)이다.

? **생각해 보기** 줄의 장력의 성분들은 어느 방향을 향하는가?

막대는 수평과 각 θ를 이루고 줄은 막대와 직각을 이루므로, 줄은 **연직선**과 각 θ를 이룬다. 따라서 장력 $\frac{1}{5}W$의 연직 성분은 $\frac{1}{5}W\cos\theta$(위쪽)이고, 수평 성분은 $\frac{1}{5}W\sin\theta$로 A가 있는 쪽에서 멀어지며 B 너머를 향한다. 마찰력은 이 수평 방향의 당김과 평형을 이루어야 하므로, 그림과 같이 B에서 A가 있는 쪽을 향해 작용한다.

연직 방향으로 분해하면:

$$R + \tfrac{1}{5}W\cos 60° = W \quad \Longrightarrow \quad R = W - \tfrac{1}{10}W = \tfrac{9}{10}W.$$

수평 방향으로 분해하면:

$$F = \tfrac{1}{5}W\sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{10}W.$$

막대가 미끄러지지 않을 조건은 $F \le \mu R$, 즉

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/10}{9/10} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

이다. 따라서 미끄러짐을 막는 가장 작은 마찰계수(coefficient of friction)는 $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{9} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.192$이다(등호일 때 막대는 한계 평형(limiting equilibrium) 상태에 있다).

검산

- $x = \tfrac{9}{5}l$일 때 두 줄 설정에서는 $T = W \cdot \frac{6/5}{3} = \tfrac{2}{5}W$, 받침점 설정에서는 $T = W \cdot \frac{4/5}{2} = \tfrac{2}{5}W$를 얻는다. 당연히 그래야 하듯이 둘이 같다.
- 기울어진 위치에서 A에 대한 모멘트도 잡아 보면($W = l = 1$, $\theta = 60^\circ$, $R = 0.9$, $F \approx 0.1732$로 두고) 역시 합 모멘트가 영이 되므로, R와 F를 함께 검산할 수 있다.
- 수치로는 $\mu_{\min} = \sqrt{3}/9 \approx 0.19245$이며, 컴퓨터로 힘 벡터를 구성하고 세 평형 방정식을 모두 확인하여 이를 검증하였다.

흔한 실수

- 무게의 모멘트 팔 길이로 $\tfrac{6}{5}l\sin\theta$를 쓰는 실수. B에서 무게의 작용선까지의 수평 거리는 $\tfrac{6}{5}l\cos\theta$이다.
- 수직인 줄에 연직 성분이 있다는 것을 잊고 $R = W$로 두는 실수. 그러면 $\mu = \sqrt{3}/10$이 되어 값이 너무 작다.
- 막대가 균일하다고 가정하여 G를 중점에 두는 실수. 첫 부분의 핵심이 바로 G의 위치를 찾는 것이다.

STEP 너머

평형 상태의 측정으로부터 무게중심을 찾는 것은 강력한 아이디어의 정역학적 형태이다. 즉 한 점에 대한 힘 계의 모멘트는 하나의 합력을 제외하면 그 계를 결정한다. 대학에서는 이것이 강체 정역학, 나아가 동역학의 연구로 이어지며, 그곳에서 무게중심과 관성 모멘트(moment of inertia)는 물체의 운동을 지배하는 두 가지 양이 된다. Kleppner와

Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 토크(torque)와 강체를 다루며, 이런 유형의 더 어려운 문제들을 풍부하게 담고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.