풀이

STEP I 2005, 문제 8

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP I 2005, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q8

핵심 아이디어

첫 부분의 항등식(identity)은 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky^2 + (\text{오직}x\text{에 대한 식})$ 꼴의 방정식을 알아보는 처방이다. 방정식이 일단 이 꼴이 되면, 치환(substitution) $y^2 = x^k f(x)$에 의해 y^2항이 소거되고 $f'(x)$가 x의 함수와 같다는 식만 남으므로, 이를 그냥 적분하면 된다. 해야 할 일은 k를 고르는 것과, (ii)에서 좌변이 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$가 되도록 양변을 나누는 것뿐이다.

풀이

항등식

$y^2 = x^k f(x)$의 양변을 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하고, 우변에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다.

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1}f(x) + x^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

양변에 x를 곱하면

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\,x^k f(x) + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = ky^2 + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

이다. $x^k f(x) = y^2$이기 때문이다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (i)

$k = 1$로 두어 $y^2 = xf(x)$라 쓰면, 항등식은 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + x^2 f'(x)$가 된다. 주어진 방정식과 비교하면 y^2항이 일치하므로, 방정식은 다음이 성립할 때 정확히 성립한다.

$$x^2 f'(x) = x^2 - 1, \qquad \text{즉,} \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

적분하면 $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + c$이므로

$$y^2 = xf(x) = x^2 + cx + 1.$$

$x = 1$일 때 $y = 2$라는 조건에서 $4 = 1 + c + 1$이므로 $c = 2$이고

$$y^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

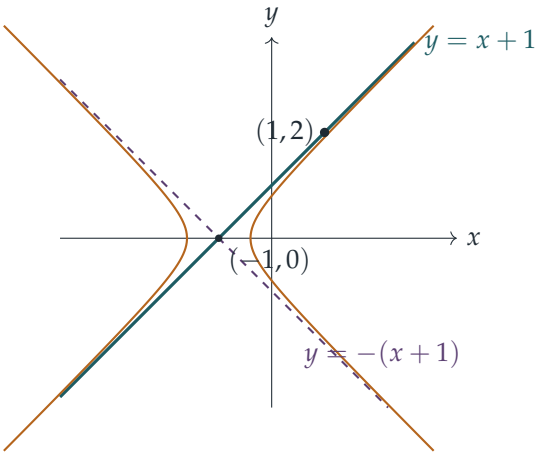
따라서 $y = x + 1$ 또는 $y = -(x+1)$이다. 이 중 $(1, 2)$를 지나는 것은 $y = x + 1$뿐이므로 해는

$$y = x + 1.$$

이다. (다시 대입해 보면 $2x(x+1) \cdot 1 = 2x^2 + 2x$이고 $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 2x^2 + 2x$이므로, 나눗셈을 했던 $x = 0$을 포함한 모든 x에서 방정식을 만족한다.)

생각해 보기 답이 그저 $y = x + 1$일 때, "기하학적으로 설명하라"는 무엇을 요구하는 것일까?

해곡선은 직선이다. 즉 $(-1, 0)$과 $(0, 1)$을 지나는 기울기(gradient) 1인 직선으로, x축과 45°의 각을 이룬다. 이것이 왜 조금 놀라운지 말해 둘 가치가 있다. 일반해(general solution) $y^2 - x^2 - cx = 1$은 이차곡선(conic)의 족이다. 완전제곱식을 만들면(completing the square) $y^2 - (x + \frac{c}{2})^2 = 1 - \frac{c^2}{4}$가 되는데, 이는 중심이 $(-\frac{c}{2}, 0)$이고 점근선(asymptote)이 $y = \pm(x + \frac{c}{2})$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다. 초기 조건(initial condition)은 $c = 2$를 골라내는데, 이는 우변이 0이 되어 쌍곡선이 자기 자신의 점근선 쌍 $y = \pm(x+1)$로 퇴화(degenerate)하는 경우이다. 우리가 구한 해는 그 쌍 중 한 갈래인 $y = x + 1$이다.



실선이 해이고, 점선은 $y^2 = (x+1)^2$의 나머지 절반이다. 호박색 곡선은 족 중 퇴화하지 않은 곡선의 모양을 대략 그린 것으로, 이와 같은 두 직선을 점근선으로 하여 다가가는 직각쌍곡선이다.

소문항 (ii)

항등식을 쓰려면 좌변에 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$가 있어야 하므로, 방정식을 x로 나눈다($\ln x$항 때문에 $x>0$이어야 하므로 이렇게 해도 안전하다).

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + \frac{2\ln x}{x}.$$

y^2의 계수가 -1이므로 $k=-1$, 즉 $y^2 = f(x)/x$로 둔다. 그러면 $x^{k+1} = x^0 = 1$이고 항등식은 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + f'(x)$가 된다. 비교하면

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)^2 = \frac{2\ln x}{x}$이므로 $f(x) = (\ln x)^2 + c$를 얻고, 따라서

$$y^2 = \frac{(\ln x)^2 + c}{x}.$$

$x=1$에서 $y=1$이므로 $1 = (0+c)/1$, 즉 $c=1$이다. $x=1$에서 $y=1>0$이고 y는 결코 0이 되지 않으므로(분자 $1+(\ln x)^2$는 1 이상이다) 양의 제곱근을 택하면, 해는

$$y = \sqrt{\frac{1+(\ln x)^2}{x}}, \qquad x>0.$$

이다.

검산

- (i)에서 직선 $y=x+1$은 위에서처럼 방정식에 직접 대입하여 확인할 수 있다. 방정식을 $(1,2)$에서부터 수치적으로 적분하면(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) $x=2$에서 $y=3.000$, $x=5$에서 $y=6.000$을 얻는다.
- (ii)에서 $y^2 = (1+(\ln x)^2)/x$로부터 $y(3)\approx 0.8577$, $y(0.2)\approx 4.2369$를 얻는다. 미분방정식을 $(1,1)$에서부터 수치적으로 적분한 결과와 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다.
- 항등식 자체: $k=0$을 넣어 보면 $2xy\,y' = xf'$로 줄어드는데, 이는 그저 $(y^2)' = f'$에 x를 곱한 것이다.

흔한 실수

- (ii)에서 습관적으로 $k=1$을 쓰는 것. x로 나눈 뒤의 y^2항의 부호가 $k=-1$을 결정한다.
- (ii)에서 x로 나누는 것을 잊고, $2x^2y\,y'$를 항등식에 맞추려 하는 것.
- (i)의 답을 $(1,2)$를 지나는 갈래를 고르지 않은 채 $y^2=(x+1)^2$로 남겨 두는 것.

STEP 너머

여기서의 치환은 표준적인 기법을 변형한 것이다. $u = y^2$로 쓰면 $2xy\,y' = ky^2 + g(x)$는 **선형**(*linear*) 방정식 $xu' - ku = g(x)$가 되고, x^{-k}가 그 적분인자(integrating factor)이다. 거듭제곱 치환을 하면 선형이 되는 방정식을 베르누이 방정식(Bernoulli equations)이라 하며, 대학 상미분방정식(ODE) 강의에서 가장 먼저 만나는 비선형 방정식 가운데 하나이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)은 이를 적분인자 및 완전미분방정식(exact equations)과 함께 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.