풀이

STEP I 2005, 문제 7

순수수학 • 망원곱

> **STEP I 2005, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q7

핵심 아이디어

세 곱은 모두 **연쇄 소거**(*telescoping*)된다. 각 인수를 비 $g(r+1)/g(r)$ 또는 그러한 비들의 곱으로 나타내면 거의 모든 것이 약분되고 처음 값과 마지막 값만 남는다. 소문항 (i)과 (ii)는 이 원리를 보여 주는 준비 운동이다. 소문항 (iii)에서 해야 할 일은 삼각함수 인수가 사실은 그러한 비라는 것을 알아차리는 것이다. 공통분모(common denominator) $\sin\frac{(2r-1)\pi}{n}$로 통분하면 분자가 합각(compound angle)의 사인이 된다.

풀이

소문항 (i)

곱을 풀어 쓰면

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}.$$

각 분자가 다음 인수의 분모와 약분되므로 마지막 분자와 첫 분모만 남는다.

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{n+1}{1}=n+1.$$

소문항 (ii)

분자를 $r^2-1=(r-1)(r+1)$로 인수분해하고 각 인수를 둘로 나눈다.

$$\frac{r^2-1}{r^2}=\frac{r-1}{r}\times\frac{r+1}{r}.$$

곱들의 곱은 인수들의 곱이므로 두 묶음을 따로 다룰 수 있다(여기서 $n \geq 2$이다).

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r-1}{r} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$
$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r+1}{r} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

두 곱 모두 소문항 (i)과 똑같이 연쇄 소거된다. 둘을 곱하면

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r^2-1}{r^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

소문항 (iii)

$\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$, $\beta_r = \dfrac{(2r-1)\pi}{n}$이라 하면 r번째 인수는 $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r$이다.

? **생각해 보기** $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta$가 어떻게 비슷한 두 대상의 비가 될 수 있을까?

$\cot\beta = \cos\beta / \sin\beta$로 쓰고 통분한다. 그러면 분자는 합각의 전개식이 된다.

$$\cos\alpha + \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

이를 위해서는 $\sin\beta_r \neq 0$이어야 하며, 바로 여기에서 n이 짝수라는 조건을 사용한다. $\sin\beta_r = 0$이 되는 것은 $(2r-1)/n$이 정수일 때뿐이다. 그런데 $2r-1$은 홀수이고 n은 짝수이므로, 홀수는 n의 배수가 될 수 없다. 따라서 모든 인수가 정의되며, 아래의 모든 분모는 0이 아니다.

이제 $\alpha + \beta_r = \dfrac{2\pi + (2r-1)\pi}{n} = \dfrac{(2r+1)\pi}{n} = \beta_{r+1}$이므로

$$\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r = \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r}.$$

이것은 $g(r) = \sin\beta_r$인 소문항 (i)과 정확히 같은 꼴이다. 곱은 연쇄 소거된다.

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \times \frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_2} \times \cdots \times \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_n}$$
$$= \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_1} = \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin(2\pi + \frac{\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

sin의 주기는 2π이므로 분자와 분모가 같고, 따라서

$$\prod_{r=1}^{n} \left(\cos\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n} \cot\tfrac{(2r-1)\pi}{n}\right) = 1.$$

검산

- $n = 3$일 때 소문항 (i): $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4 = n + 1$.
- $n = 2$일 때 소문항 (ii): 인수는 $\frac{3}{4}$ 하나뿐이고 $\frac{n+1}{2n} = \frac{3}{4}$이다. $n \to \infty$일 때 곱은 $\frac{1}{2}$로 수렴하며, 이는 잘 알려진 무한곱(infinite product)이다.
- $n = 4$일 때 소문항 (iii): $\cos \frac{\pi}{2} = 0$이고 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$이므로 인수는 $\cot \frac{\pi}{4}$, $\cot \frac{3\pi}{4}$, $\cot \frac{5\pi}{4}$, $\cot \frac{7\pi}{4}$, 즉 $1, -1, 1, -1$이고 곱은 1이다. 또한 60 이하의 모든 짝수 n에 대하여 곱이 (10^{-8} 이내의 오차로) 1임을 수치적으로 확인하였다.
- n이 홀수이면 $r = \frac{n+1}{2}$인 인수에 정의되지 않는 $\cot \pi$가 들어간다. 이것이 조건이 필요한 이유이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $r = 1$부터 약분을 시작하는 것: 아래끝이 2이므로 첫 인수는 $\frac{1}{2}$과 $\frac{3}{2}$이다.
- 소문항 (iii)에서 $\sin \frac{(2n+1)\pi}{n} / \sin \frac{\pi}{n}$에서 멈추고 주기성(periodicity)을 이용해 1로 간단히 하지 않는 것.
- "n은 짝수"라는 조건이 어디에 쓰이는지 설명하지 않는 것. 이 조건이 바로 모든 코탄젠트와 모든 분모가 잘 정의되도록 해 준다.

STEP 너머

연쇄 소거되는 곱은 부분분수(partial fractions)를 이용할 때 만나는 연쇄 소거되는 합의 곱셈판이다. 로그를 취하면 하나가 다른 하나로 바뀐다. 소문항 (ii)는 무한곱 $\prod_{r \geq 2}(1 - 1/r^2) = \frac{1}{2}$의 유한 버전이다. 이와 같은 무한곱, 그리고 오일러(Euler)의 곱

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{r \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right),$$

은 대학 첫 해석학(analysis) 강좌에서 제대로 다루며, 거기서 곱의 수렴(convergence)은 로그들의 합의 수렴을 통해 정의된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 앞으로 필요할 수렴 개념을 쌓기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.