풀이

STEP I 2005, 문제 6

순수수학 • 아폴로니오스의 원

> **STEP I 2005, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q6

핵심 아이디어

$AP = 2BP$와 같은 조건에는 제곱근이 들어 있으므로, 먼저 양변을 제곱한다. 거리의 제곱은 다항식이고, $x^2 + y^2$ 항이 양변에서 같은 계수로 나타나기 때문에 자취가 원이 된다. 소문항 (ii)에서는 x축 위의 일반적인 두 점에 대해 같은 과정을 거친다. 그러면 $x^2 + y^2 + px + q = 0$ 꼴의 두 방정식은 p와 q가 각각 같을 때, 그리고 그때에만 같은 원을 나타낸다. 계수를 비교(comparing coefficients)하면 k^2에 대한 두 식을 얻고, k를 소거하면 두 결과를 모두 얻는다.

풀이

소문항 (i)

두 길이는 모두 음이 아니므로 $AP = 2BP$는 $AP^2 = 4BP^2$와 동치이다.

$$(x-5)^2 + (y-16)^2 = 4[(x+4)^2 + (y-4)^2].$$

전개하면

$$x^2 - 10x + y^2 - 32y + 281 = 4x^2 + 32x + 4y^2 - 32y + 128.$$

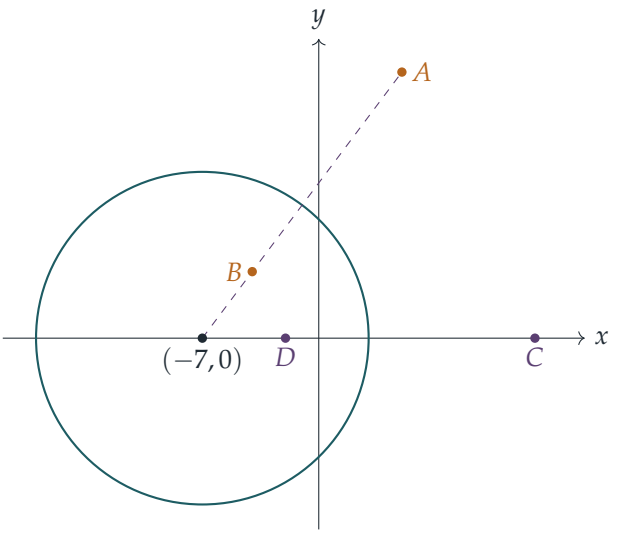
y항은 소거되고, 모든 항을 우변으로 모으면

$$3x^2 + 42x + 3y^2 - 153 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0.$$

완전제곱식을 만들면(completing the square) $x^2 + 14x = (x+7)^2 - 49$이므로

$$(x+7)^2 + y^2 = 100,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 자취(locus)는 중심이 $(-7, 0)$이고 반지름이 10인 원이다.



(점 $C = (13, 0)$과 $D = (-2, 0)$은 소문항 (ii)에 해당하는 가능한 한 쌍이며, 이때 $k = 2$이다. A, B와 중심 역시 한 직선 위에 있음(collinear)에 주목하라.)

소문항 (ii)

앞에서와 마찬가지로 $QC = kQD$는 $QC^2 = k^2QD^2$와 동치이다. $Q = (x, y)$라 하면

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2[(x-b)^2 + y^2].$$

항을 우변으로 모으면

$$(k^2-1)(x^2+y^2) - 2(k^2b - a)x + (k^2b^2 - a^2) = 0.$$

$k > 1$이므로 $k^2 - 1 \neq 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$x^2 + y^2 - \frac{2(k^2b-a)}{k^2-1}x + \frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1} = 0.$$

? 생각해 보기 왜 $x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0$과 계수를 비교해도 되는가?

방정식 $x^2 + y^2 + px + q = 0$은 $(x + \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$로 다시 쓸 수 있다. 이것이 중심이 $(-7, 0)$이고 반지름이 10인 원이라면, 중심에서 $p = 14$가 정해지고 반지름에서 $\frac{1}{4}p^2 - q = 100$이 정해지므로 $q = -51$이다. 원의 중심과 반지름은 각각 하나뿐이므로 두 방정식의 p와 q는 각각 같아야 한다.

x의 계수를 비교하면

$$\frac{k^2b-a}{k^2-1} = -7 \implies k^2b - a = -7k^2 + 7 \implies k^2(b+7) = a + 7.$$

상수항을 비교하면

$$\frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1}=-51 \implies k^2b^2-a^2=-51k^2+51 \implies k^2(b^2+51)=a^2+51.$$

이제 $b^2+51>0$이고, $b+7\neq 0$이다. 만약 $b=-7$이면 첫 번째 식에서 $a=-7=b$가 되는데, 이는 조건에서 배제된 경우이다. 따라서 두 값으로 나누어 k^2에 대한 두 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{a+7}{b+7}=k^2=\frac{a^2+51}{b^2+51},$$

이것이 첫 번째 결과이다.

두 번째 결과를 위해 양변에 분모를 곱하면

$$(a+7)(b^2+51)=(b+7)(a^2+51).$$

전개하면 상수 357이 양변에서 소거되고 다음이 남는다.

$$ab^2+51a+7b^2=a^2b+51b+7a^2.$$

각 묶음에 $a-b$가 나타나도록 항을 묶으면

$$\begin{aligned}0&=(a^2b-ab^2)-51(a-b)+7(a^2-b^2)\\&=(a-b)[ab-51+7(a+b)].\end{aligned}$$

$a\neq b$이므로 $a-b$로 나눌 수 있고, 따라서

$$ab+7a+7b=51, \quad \text{따라서} \quad ab+7a+7b+49=100, \quad \text{즉,} \quad (a+7)(b+7)=100,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- $b=-2$를 대입해 보자. 그러면 $b+7=5$이므로 $a+7=20$, $a=13$이고, $k^2=20/5=4$이다. 점 $(3,0)$은 원 위에 있으며 $QC=10=2\times 5=2\,QD$이다. 점 $(-17,0)$도 원 위에 있으며 $QC=30=2\times 15$이다.
- 소문항 (i)에서 점 $(3,0)$에 대해 $AP=\sqrt{4+256}=\sqrt{260}$이고 $BP=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$이며, 실제로 $\sqrt{260}=2\sqrt{65}$이다.
- 또한 $(a+7)(b+7)=100$을 만족하는 여러 쌍에 대해 원 위의 임의의 점들이 $QC=kQD$를 만족함을, 그리고 첫 번째 결과를 만족하는 $a\neq b$인 모든 쌍이 두 번째 결과도 만족함을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $k^2 - 1$로 나누기 전에 계수를 비교하는 것. 두 방정식은 전체에 곱해진 상수배만큼의 차이를 제외하고 일치하기만 하면 된다.
- $b + 7$이 0이 아닌지 확인하지 않고 나누는 것.
- 인수 $a - b$를 빠뜨리는 것. 이 인수가 바로 문제에서 배제한 자명한 해 $a = b$에 해당한다.

STEP 너머

두 고정점으로부터의 거리의 비가 일정한 값 $k \neq 1$인 점들의 자취를 **아폴로니오스의 원**(*circle of Apollonius*)이라 한다. 아폴로니오스(Apollonius)의 이름을 딴 것이다. 결과 $(a+7)(b+7) = 100$은, 원의 중심을 M, 반지름을 r이라 할 때 C와 D가 중심에 대해 같은 쪽에 있고 $MC \cdot MD = r^2$임을 말해 준다. 즉 C와 D는 이 원에 대한 **반전점**(*inverse points*)이다. (A와 B도 마찬가지이다. $MA = 20$, $MB = 5$.) 원에 대한 반전(inversion)은 기하학에서, 그리고 복소해석학(complex analysis)에서 강력한 도구이며, 복소해석학에서는 사상 $z \mapsto 1/\bar{z}$에 해당한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 이에 대한 아름다운 설명이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.