풀이

STEP I 2005, 문제 5

순수수학 • 거듭제곱의 적분

> **STEP I 2005, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q5

핵심 아이디어

$x+1$의 거듭제곱은 연쇄법칙의 역(reverse chain rule)으로 적분하여 $\int (x+1)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$을 얻는다. 단, 예외가 하나 있다. $n=-1$일 때는 답이 로그(logarithm)가 된다. 따라서 이 문제의 모든 경우 나누기는 "지수가 언제 -1이 되는가?"라는 물음에서 나온다. (ii)에서는 $x=(x+1)-1$로 써서 여분의 인수 x를 없애는데, 그러면 단순한 거듭제곱 두 개가 남으므로 m의 예외값도 두 개가 된다.

풀이

소문항 (i)

$k \neq 0$이면 지수 $k-1$은 -1이 아니므로

$$\int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^k}{k}\right]_0^1 = \frac{2^k-1}{k}.$$

$k=0$이면 피적분함수(integrand)는 $\frac{1}{x+1}$이고, $[0,1]$에서 $x+1>0$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

> ? **생각해 보기** $k \neq 0$일 때의 답이 왜 $k=0$일 때의 답과 관련이 있어야 하는가?

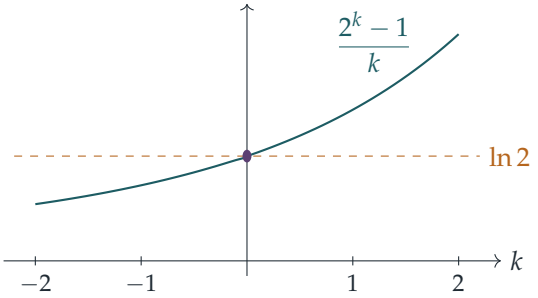
k가 0에서 조금 벗어나도 피적분함수는 거의 변하지 않기 때문이다. $0 \leq x \leq 1$에 대하여

$$\left|(x+1)^{k-1} - (x+1)^{-1}\right| = \frac{\left|(x+1)^k - 1\right|}{x+1} \leq \left|2^k - 1\right|,$$

이다. $1 \le x+1 \le 2$이므로 $(x+1)^k$은 1과 2^k 사이에 있기 때문이다. 길이가 1인 구간에서 적분하면 두 적분의 차는 많아야 $|2^k - 1|$이고, 이 값은 $k \to 0$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 $k \approx 0$ (그리고 $k \neq 0$)일 때

$$\frac{2^k - 1}{k} = \int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 (x+1)^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln 2,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 다시 말해, $k \neq 0$에 대한 공식은 $k = 0$에서 "구멍"이 나 있고, $k = 0$일 때의 적분이 그 구멍을 정확히 메운다.



소문항 (ii)

$x = (x+1) - 1$로 쓰면

$$x(x+1)^m = (x+1)^{m+1} - (x+1)^m.$$

각 항은 $x+1$의 거듭제곱이고, 이를 적분하면 지수가 -1일 때에만 로그가 나온다. 이는 $m+1 = -1$ 또는 $m = -1$일 때 일어나므로, 경우는 $m = -1$, $m = -2$, 그리고 나머지 모든 경우로 나뉜다.

일반적인 경우, $m \neq -1, -2$.

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^{m+2}}{m+2} - \frac{(x+1)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{2^{m+2}-1}{m+2} - \frac{2^{m+1}-1}{m+1}.$$

통분하면 분자는

$$(m+1)\left(2^{m+2}-1\right) - (m+2)\left(2^{m+1}-1\right) = 2^{m+1}\left(2(m+1) - (m+2)\right) + 1 = m\,2^{m+1} + 1,$$

이므로

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \frac{m\,2^{m+1}+1}{(m+1)(m+2)}, \qquad m \neq -1, -2.$$

$m = -1$인 경우.

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

$m = -2$인 경우.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \tfrac{1}{2}.$$

생각해 보기 일반 공식은 $m = -1$과 $m = -2$에서 $0/0$이 된다. 이것은 모순인가?

아니다. 이것은 다시 소문항 (i)의 상황이다. $m = -1$에서 분자는 $-1 \cdot 2^0 + 1 = 0$이고, $m = -2$에서 분자는 $-2 \cdot 2^{-1} + 1 = 0$이다. 따라서 그 점에서 공식은 틀린 것이 아니라 정의되지 않을 뿐이며, 소문항 (i)에서처럼 그 극한(limit)값이 바로 특수한 경우의 답($1 - \ln 2 \approx 0.307$과 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$)이 된다.

검산

- $m = 0$: $\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$이고, 공식은 $\frac{0+1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$를 준다. $m = 1$일 때: $\int_0^1 (x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$이고, 공식은 $\frac{4+1}{6}$을 준다.
- 수치적으로 $k = 10^{-4}$이면 $\frac{2^k - 1}{k} \approx 0.693171$이고, 이는 $\ln 2 \approx 0.693147$과 비교된다.
- 여러 k, m 값($m = -1, -2$ 포함)에 대하여 모든 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 10^{-9} 이내로 공식과 일치한다. 일반 공식에 $m = -1 \pm 10^{-5}$를 대입하면 $0.30685\ldots$가 나와 $1 - \ln 2$와 일치한다.

흔한 실수

- $k = 0$일 때 $\frac{(x+1)^0}{0}$이라고 쓰거나, (ii)에서 m의 예외값이 하나가 아니라 **두** 개임을 놓치는 것.
- (ii)에서 부분적분(integration by parts)을 하면서 $m = -1$일 때 이것이 성립하지 않는다는 것을 알아채지 못한 채 $m + 1$로 나누는 것.
- $m = -2$인 경우에 $\int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = -(x+1)^{-1}$의 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

(i)의 결론은 $\lim_{k\to 0} \frac{2^k - 1}{k} = \ln 2$라는 것이며, 이는 $k = 0$에서 2^k의 도함수(derivative) 값이다. 여기서 쓰인 일반적인 사실은 피적분함수들이 **균등**수렴(uniform convergence)하면 그 적분들도 수렴한다는 것이다. 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 정리이며, 균등성이 없으면 성립하지 않는다. 같은 아이디어로 $n \to -1$일 때 $\int x^n \,\mathrm{d}x$가 왜 $\ln x$가 "되는

지"도 설명할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 균등수렴과 적분을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.