풀이

STEP I 2005, 문제 4

순수수학 • 배각 공식

> **STEP I 2005, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q4

핵심 아이디어

두 소문항 모두 배각(multiple angle)에 관한 문제이다. (i)에서 실제로 결정해야 할 것은 $\sin\theta$의 부호뿐이며, 이는 주어진 범위로 정해진다. 그다음부터는 2배각 공식과 3배각 공식이 일을 해 준다. (ii)에서는 $\tan 3\theta$를 $\tan(2\theta+\theta)$로 만들어 내고, 그러면 "이를 이용하여(hence)" 부분은 $t=\tan\theta$에 대한 삼차방정식(cubic)이 된다. STEP 문제에 나오는 삼차식은 거의 언제나 눈으로 찾을 수 있는 근을 가지며, θ의 범위가 어느 근을 남길지 알려 준다.

풀이

소문항 (i)

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$$\sin^2\theta = 1-\tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25}, \qquad \text{따라서} \qquad \sin\theta = \pm\tfrac{4}{5}.$$

$\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$이면 θ는 제4사분면에 있고, 여기서 $\sin\theta\le 0$이다. 따라서 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$이고,

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$\cos 3\theta$를 구하려면 3배각 공식이 필요하다. $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$라 하면

$$\begin{aligned}\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2c^2-1)c - 2s^2c \\ &= (2c^2-1)c - 2(1-c^2)c \\ &= 4c^3-3c.\end{aligned}$$

$c = \frac{3}{5}$을 대입하면

$$\cos 3\theta = 4 \cdot \frac{27}{125} - \frac{9}{5} = \frac{108 - 225}{125} = -\frac{117}{125}.$$

(여기서는 $\sin\theta$의 부호가 중요하지 않다. $\cos 3\theta$는 $\cos\theta$에만 의존하기 때문이다.)

소문항 (ii)

항등식. $t = \tan\theta$라 하자. 2배각 공식에 의해 $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$이고, 덧셈정리(addition formula)에 의해

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}}.$$

분자와 분모에 $1 - t^2$을 곱하면

$$\tan 3\theta = \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

이 되어 항등식을 얻는다. 이 유도 과정에는 $\tan 2\theta$가 존재해야 하므로 $t^2 \neq 1$이어야 한다. $t = \pm 1$일 때는 직접 확인할 수 있다. 예를 들어 $\theta = \frac{\pi}{4}$이면 우변은 $\frac{3-1}{1-3} = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$이고, $t = -1$인 경우는 부호만 바뀐 같은 계산이다.

$\tan 3\theta = \frac{11}{2}$ 풀기. 항등식에 의해

$$\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{11}{2} \quad \Longrightarrow \quad 6t - 2t^3 = 11 - 33t^2 \quad \Longrightarrow \quad 2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = 0.$$

여기서 분모를 없애도 괜찮은 이유는 $1 - 3t^2 \neq 0$이기 때문이다. 만약 이것이 0이라면 $\tan 3\theta$는 $\frac{11}{2}$이 아니라 정의되지 않을 것이다.

> **생각해 보기** $2t^3 - 33t^2 - 6t + 11$의 근을 어떻게 찾을까?

기약분수로 나타낸 유리근 p/q는 p가 11의 약수이고 q가 2의 약수여야 하므로, $\pm 1, \pm 11, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}$만 시도해 보면 된다. $t = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$2 \cdot \tfrac{1}{8} - 33 \cdot \tfrac{1}{4} - 3 + 11 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{33}{4} + 8 = 0.$$

따라서 $2t - 1$은 인수이고, 계수를 비교하면

$$2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = (2t - 1)(t^2 - 16t - 11).$$

이차식의 근은 $t = 8 \pm \sqrt{64 + 11} = 8 \pm 5\sqrt{3}$이다. 따라서 세 후보는

$$t = \tfrac{1}{2}, \qquad t = 8 + 5\sqrt{3} \approx 16.66, \qquad t = 8 - 5\sqrt{3} \approx -0.66.$$

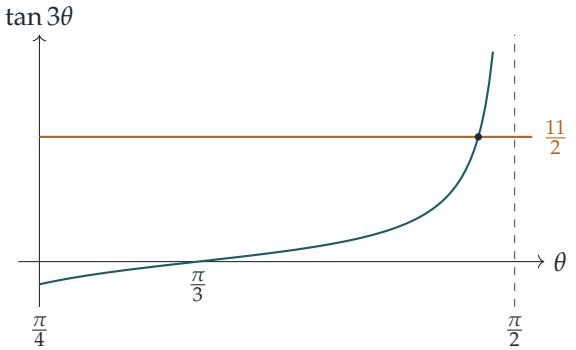
이들은 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에 있는 각 가운데 그 세 배의 탄젠트가 $\frac{11}{2}$인 세 각에 대응한다.

이제 범위를 이용하자. tan는 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하고 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로 $t \geq 1$이어야 한다($\theta = \frac{\pi}{2}$ 자체는 제외되는데, 그곳에서 $\tan\theta$가 정의되지 않기 때문이다). 조건을 만족하는 후보는 하나뿐이다.

$$\tan\theta = 8 + 5\sqrt{3}.$$

나머지 두 값도 삼차방정식의 진짜 근이지만 범위 밖의 각에 해당한다. $\frac{1}{2} < 1$이고 $8 - 5\sqrt{3} < 0$이기 때문이다.

그래프를 보면 해가 정확히 하나임을 확인할 수 있다. θ가 $\frac{\pi}{4}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 움직일 때 3θ는 $\frac{3\pi}{4}$에서 $\frac{3\pi}{2}$까지 움직이고, 이 구간에서 $\tan 3\theta$는 -1에서 $+\infty$까지 연속적으로 증가하므로 $\frac{11}{2}$을 정확히 한 번 지난다.



검산

- (i)에서 $\theta = 2\pi - \arccos\frac{3}{5} \approx 5.3559$이고, 계산기로 구하면 $\sin 2\theta = -0.96$, $\cos 3\theta = -0.936 = -\frac{117}{125}$이다.
- (ii)에서 $\theta = \arctan(8 + 5\sqrt{3}) \approx 1.5108$이며, 이는 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$와 $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ 사이에 있고, $\tan 3\theta \approx 5.5000$이다.
- 항등식의 간단한 확인: $\theta = \frac{\pi}{12}$에서 $t = 2 - \sqrt{3}$이고, 우변을 정리하면 $1 = \tan\frac{\pi}{4}$가 된다.

흔한 실수

- (i)에서 $\sin\theta = +\frac{4}{5}$로 잡는 것. 그러면 $\sin 2\theta$의 부호가 틀리게 된다.
- (ii)에서 눈으로 찾은 근이라는 이유로 $t = \frac{1}{2}$에서 멈추는 것. 이것은 삼차방정식의 근이지만 $\arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$이다.

STEP 너머

삼차방정식이 세 근을 가진 것은 $\tan 3\theta = \frac{11}{2}$이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $\frac{\pi}{3}$ 간격으로 떨어진 세 개의 해 θ를 갖기 때문이다. 같은 원리가 거꾸로 작동하는 것이 삼차방정식의 고전적인 삼각함수 풀이법이며, 더 일반적으로 드무아브르(de Moivre)의 정리는 $\tan n\theta$를 $\tan\theta$에 대한 다항식들의 비로 나타내 주는데, 그 근들은 같은 간격으로 놓인 각들의 탄젠트 값이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 배각 공식이 왜 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$에서 그토록 자연스럽게 나오는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.