풀이

STEP I 2005, 문제 3

순수수학 • 유리방정식

> **STEP I 2005, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q3

핵심 아이디어

각 방정식의 양변에 $(x-a)(x-b)$를 곱하여 다항방정식(polynomial equation)으로 바꾼 다음, 그 실근의 개수를 센다. 주의할 점은 분모를 없애는 과정에서 원래 방정식에서는 허용되지 않는 "해" $x=a$ 또는 $x=b$가 원리적으로 추가될 수 있다는 것이다. 따라서 이런 일이 절대 일어나지 않음을 확인해야 한다. 소문항 (ii)에서 이차방정식이 중근(repeated root)을 가질 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 0인 것이며, 이로부터 조건을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$x \neq a, b$일 때 양변에 $(x-a)(x-b)$를 곱할 수 있고, 주어진 방정식은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} x(x-b)+x(x-a) &= (x-a)(x-b) \\ 2x^2-(a+b)x &= x^2-(a+b)x+ab \\ x^2 &= ab. \end{aligned}$$

a와 b의 부호가 같으므로 $ab>0$이고, 따라서 이 방정식은 서로 다른 두 실근 $x=\sqrt{ab}$와 $x=-\sqrt{ab}$를 가진다.

이 근들이 허용되는 값인지 여전히 확인해야 한다. 만약 $x=a$가 근이라면 $a^2=ab$이고, $a\neq 0$이므로 $a=b$가 되어 모순이다. 같은 방법으로 $x=b$도 근이 아니다. 따라서 두 근 모두 진짜 해이며, 방정식은 정확히 서로 다른 두 실수해 $x=\pm\sqrt{ab}$를 가진다.

소문항 (ii)

이번에도 $x \neq a, b$일 때 양변에 $(x-a)(x-b)$를 곱하면

$$2x^2 - (a+b)x = (1+c)(x^2 - (a+b)x + ab),$$

이고, 이를 정리하면

$$q(x) \equiv (1-c)x^2 + c(a+b)x - (1+c)ab = 0.$$

이다. $c \neq 1$이므로 최고차항의 계수가 0이 아니고, 따라서 이것은 실제로 이차방정식이다.

생각해 보기 q의 근 중 하나가 a 또는 b여서 버려야 하는 경우가 생길 수 있을까?

대입해서 확인해 보자.

$$q(a) = (1-c)a^2 + c(a+b)a - (1+c)ab = a^2 - ab = a(a-b),$$
$$q(b) = b^2 - ab = b(b-a)$$

(c가 포함된 항들은 소거된다.) a, b는 0이 아니고 서로 다르므로 두 값 모두 0이 아니다. 따라서 a와 b는 결코 q의 근이 아니다. 즉 q의 모든 실근은 원래 방정식의 해이고, 그 역도 성립한다.

q의 판별식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta &= c^2(a+b)^2 + 4(1-c)(1+c)ab \\ &= c^2[(a+b)^2 - 4ab] + 4ab \\ &= c^2(a-b)^2 + 4ab.\end{aligned}$$

$c^2 = -\dfrac{4ab}{(a-b)^2}$이면 ($a \neq b$이므로 $(a-b)^2$으로 나눌 수 있다) $\Delta = 0$이다. 이때 이차방정식은 정확히 하나의 (중복된) 실근

$$x = -\frac{c(a+b)}{2(1-c)},$$

를 가지며, 위의 확인에 의해 이 근은 a도 b도 아니다. 따라서 요구한 대로 방정식은 정확히 하나의 실수해를 가진다. (사실 역도 성립한다. $\Delta > 0$이면 해가 두 개이고 $\Delta < 0$이면 해가 없으므로, 이 조건은 필요조건이기도 하다.)

조건 다시 쓰기. 통분하면

$$1 - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{-4ab}{(a-b)^2},$$

이므로, 요구한 대로 조건은 $c^2 = 1 - \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$이다.

$0 < c^2 \leq 1$ **이끌어 내기.** 제곱 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$은 음이 아니므로, 두 번째 형태로부터 $c^2 \leq 1$이다. 첫 번째 형태는 $c^2 = -4ab/(a-b)^2$이다. $ab \neq 0$이므로 이 값은 0이 아니고, 실수 c에 대하여 $c^2 \geq 0$이므로 $c^2 > 0$이다. (이로부터 $ab < 0$, 즉 a와 b의 부호가 서로 반대라는 것도 알 수 있으며, 이는 소문항 (i)과 잘 들어맞는다.) 따라서 이 조건은 $0 < c^2 \leq 1$일 때에만 성립할 수 있다.

상한값은 실제로 달성된다. $c^2 = 1$인 것은 정확히 $a + b = 0$일 때이고, 이때 ($c \neq 1$이므로) $c = -1$이다.

검산

- $a = 4, b = -1$이라 하자. 그러면 $c^2 = 16/25$이고, $c = \frac{4}{5}$로 택한다. 중근은 $x = -\frac{4}{5} \cdot 3/(2 \cdot \frac{1}{5}) = -6$이며, 실제로 $\frac{-6}{-10} + \frac{-6}{-5} = 0.6 + 1.2 = 1.8 = 1 + c$이다.
- 극단적인 경우인 $a = 1, b = -1, c = -1$에서는 $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = 0$, 즉 $2x^2 = 0$이 되어 해는 $x = 0$ 하나뿐이다.
- 소문항 (i)에서 $a = 1, b = 4$이면 $x = \pm 2$이고, $\frac{2}{1} + \frac{2}{-2} = 1$, $\frac{-2}{-3} + \frac{-2}{-6} = 1$이다.

흔한 실수

- 분모를 없앤 뒤 근이 a나 b가 아님을 확인하는 것을 잊는 실수. 이 문제에서는 결과적으로 문제가 없지만, 그 사실을 보여야 한다.
- c^2이 포함된 항들을 묶지 않고 판별식을 전개하는 실수. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$으로 쓰는 것이 조건을 깔끔하게 이끌어 내는 열쇠이다.
- $c^2 > 0$ 대신 $c^2 \geq 0$이라고 주장하는 실수. 등호가 없는 부등식은 $ab \neq 0$에서 나온다.

STEP 너머

좌변은 유리함수(rational function)이고, "그 그래프가 수평선 $y = 1 + c$와 몇 번 만나는가?"는 그 함수의 치역(range)에 관한 질문이다. 여기서 찾은 조건은 그 함수의 극값(turning-point value), 즉 수평선이 그래프에 딱 접하는 높이를 골라낸다. 다항식이 언제 중근을 가지는지 묻다 보면 판별식에, 더 일반적으로는 대학 1학년 대수학에 등장하는 종결식(resultant)에 이르게 된다. 이런 유형의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.