풀이

STEP I 2005, 문제 2

순수수학 • 포물선의 접선과 법선

> **STEP I 2005, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q2

핵심 아이디어

포물선 $y^2 = 4x$를 $(t^2, 2t)$로 매개화(parametrise)하면 모든 접선(tangent)과 법선(normal)이 x와 y에 대한 짧은 일차방정식이 된다. 따라서 교점을 구하는 일은 연립일차방정식 두 개를 푸는 것에 지나지 않는다. 초점(focus)인 $(1,0)$이 PQ 위에 있다는 조건은 p와 q 사이의 깔끔한 관계식 하나로 바뀐다. 바로 그 관계식이 P와 Q에서의 접선을 수직이 되게 한다. 이것만 얻으면 직사각형은 거의 저절로 그려진다.

풀이

접선과 점 R

점 $(t^2, 2t)$에서 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2$이므로, 그 점에서 C의 기울기(gradient)는 $\dfrac{2}{2t} = \dfrac{1}{t}$이다($t \neq 0$이므로 문제없다). 따라서 P에서의 접선은

$$y - 2p = \frac{1}{p}\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + p^2,$$

이고, 마찬가지로 Q에서의 접선은 $qy = x + q^2$이다. 두 식을 빼면

$$(p - q)\,y = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q),$$

이고, $p \neq q$이므로 $p - q$로 나누어 $y = p + q$를 얻는다. 그러면 $x = py - p^2 = p(p + q) - p^2 = pq$이다. 따라서

$$R = (pq,\ p + q),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

법선과 점 S

$(t^2, 2t)$에서의 법선은 접선에 수직이므로 기울기가 $-t$이다. P에서의 법선은

$$y - 2p = -p\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad px + y = 2p + p^3,$$

이고, Q에서의 법선은 $qx + y = 2q + q^3$이다. 두 식을 빼면

$$(p - q)\,x = 2(p - q) + (p^3 - q^3) = (p - q)(2 + p^2 + pq + q^2),$$

이므로, 다시 $p - q \neq 0$으로 나누면

$$x = p^2 + pq + q^2 + 2, \qquad y = 2p + p^3 - px = -p^2q - pq^2 = -pq\,(p + q).$$

이 식들은 임의의 p와 q에 대해 성립한다. 이제 추가 조건을 사용한다.

$(1, 0)$이 PQ 위에 있다는 조건 사용하기

현(chord) PQ의 기울기는

$$\frac{2p - 2q}{p^2 - q^2} = \frac{2}{p + q}$$

이므로($p + q \neq 0$일 때), 그 방정식은 $y - 2p = \dfrac{2}{p + q}(x - p^2)$이고, 정리하면

$$(p + q)\,y = 2x + 2pq.$$

가 된다. 이 꼴은 $p + q = 0$인 경우도 포함하는데, 이때는 P와 Q를 지나는 수직선 $x = -pq = p^2$이 된다. $(x, y) = (1, 0)$을 대입하면 $0 = 2 + 2pq$이므로

$$pq = -1.$$

이다. 이를 S의 좌표에 대입하면

$$S = (p^2 + q^2 + 2 + pq,\ -pq(p + q)) = (p^2 + q^2 + 1,\ p + q),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 또한 이제 $R = (-1,\ p + q)$이고, 이 점은 준선(directrix)인 직선 $x = -1$ 위에 있다는 점에도 주목하자.

$PSQR$은 직사각형이다

> **생각해 보기** 주어진 네 점이 직사각형을 이룬다는 것을 증명하는 가장 깔끔한 방법은 무엇일까?

좋은 방법은 다음과 같다: 먼저 평행사변형(parallelogram)임을 보이고(대각선이 서로를 이등분한다), 그다음 한 각이 직각임을 보인다.

평행사변형. $PSQR$에서 대각선은 PQ와 SR이다. $pq = -1$을 사용하면

$$R + S = (pq + p^2 + q^2 + 1,\ 2(p+q)) = (p^2 + q^2,\ 2p + 2q) = P + Q,$$

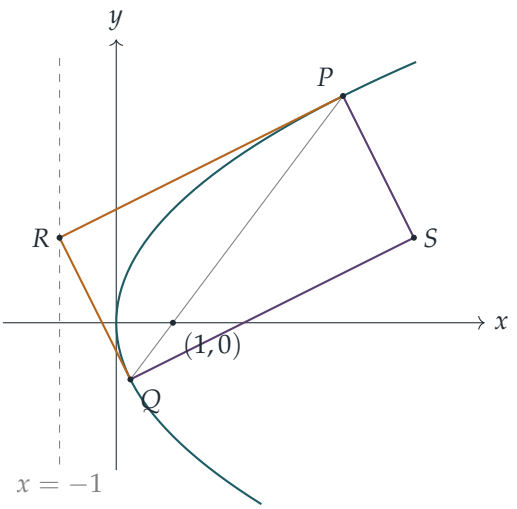
이므로 RS의 중점은 PQ의 중점과 같다. 대각선이 서로를 이등분하므로 $PSQR$은 평행사변형이다. 이것은 퇴화된(degenerate) 것이 아닌 진짜 평행사변형이다: R은 두 접선 위에 모두 있고, 포물선 위의 서로 다른 두 점에서의 접선은 한 번만 만나며 어느 쪽도 다른 접점을 지나지 않으므로, P, R, Q는 한 직선 위에 있지 않다.

직각. 변 RP와 RQ는 각각 P와 Q에서의 접선 위에 놓여 있고, 기울기는 $\frac{1}{p}$와 $\frac{1}{q}$이다. 두 기울기의 곱은

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{pq} = -1,$$

이므로 두 접선은 수직이고 각 PRQ는 직각이다.

한 각이 직각인 평행사변형은 직사각형이므로 $PSQR$은 직사각형이다. (같은 말이지만: 각 법선은 자기 접선에 수직이므로 P와 Q에서의 각은 직각이고, R에서의 각도 직각이므로 네 번째 각 역시 직각이어야 한다.)



그림은 $p = 2, q = -\frac{1}{2}$인 경우로, 접선은 호박색, 법선은 자주색, 초점현(focal chord) PQ는 회색으로 나타냈다.

검산

$p = 2, q = -\frac{1}{2}$로 두면 $pq = -1$이다. 그러면 $P = (4,4)$, $Q = (\frac{1}{4}, -1)$이고, 이 두 점을 지나는 직선 $y - 4 = \frac{4}{3}(x-4)$는 실제로 $(1,0)$을 지난다. 공식에서 $R = (-1, \frac{3}{2})$, $S = (\frac{21}{4}, \frac{3}{2})$를 얻는다. 직접 확인해 보면 $\overrightarrow{RP} = (5, \frac{5}{2})$와 $\overrightarrow{QS} = (5, \frac{5}{2})$는 같고, $\overrightarrow{RQ} = (\frac{5}{4}, -\frac{5}{2})$와 $\overrightarrow{RP}$의

내적(dot product)은 $\frac{25}{4} - \frac{25}{4} = 0$이다. 따라서 $PSQR$은 실제로 직사각형이다. 또한 약 2000가지의 무작위 p와 q에 대해 정확한 분수 계산으로 모든 좌표 공식을 확인했다.

흔한 실수

- 왜 허용되는지 밝히지 않고 $p - q$로 나누는 것. 문제에서 $p \neq q$를 준 것은 바로 그렇게 나눌 수 있게 하기 위해서이다.
- 한 꼭짓점에서 이웃한 두 변이 수직임만 보이는 것. 이것만으로는 직사각형이 되지 않는다: 평행사변형임과 한 각이 직각임을 함께 보이거나, 세 꼭짓점에서 직각임을 보여야 한다.
- S에서 $pq = -1$을 사용하는 것을 잊는 것. 일반적인 법선의 교점은 $\left(p^2 + pq + q^2 + 2,\ -pq(p+q)\right)$이고, 초점현일 때에만 주어진 꼴로 간단해진다.

STEP 너머

초점을 지나는 현을 **초점현**이라 하며, 이 문제는 초점현에 관한 두 가지 고전적인 사실을 증명한다: 양 끝에서의 접선은 서로 수직이고, 준선 위에서 만난다. 두 사실 모두 원뿔곡선(conic)에 대한 극과 극선(poles and polars) 이론의 특수한 경우이며, 이 이론에서 준선은 초점의 극선이다. 사영기하학(projective geometry)을 쓰면 이런 결과는 거의 자동으로 따라 나온다. 이런 관점에서 원뿔곡선의 매개변수 방법을 탐구하기에 좋은 책은 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.