풀이

STEP I 2005, 문제 11

역학 • 벡터 운동학

> **STEP I 2005, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q11

핵심 아이디어

이 문제는 처음부터 끝까지 두 벡터(vector) $\mathbf{r}$와 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$가 서로 어떤 위치 관계에 있는지를 다룬다. 수직(perpendicular)이라는 것은 스칼라곱(scalar product) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$가 0이라는 뜻이고, 평행(parallel)이라는 것은 "외적" 형태의 조합 $xv_y - yv_x$가 0이라는 뜻이다. $\sin 2t = 2\sin t \cos t$와 $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$로 고쳐 쓰면 두 식 모두 깔끔하게 정리된다. 거리를 구하고 곡선의 개형을 그릴 때에는 모든 것을 $\cos t$로 나타내거나 아예 t를 소거하는 것이 유리하다.

풀이

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$로 쓰면

$$x = \sin 2t = 2\sin t \cos t, \qquad y = 2\cos t, \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

이다. 미분하면 속도(velocity)는

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t)\,\mathbf{i} - (2\sin t)\,\mathbf{j}.$$

이다.

소문항 (i)

입자가 원점(origin)에 있는 것은 $x = 0$이고 $y = 0$일 때이다. 조건 $y = 0$은 $\cos t = 0$을 뜻하므로, 주어진 범위에서 $t = \frac{\pi}{2}$ 또는 $t = \frac{3\pi}{2}$이다. 이 두 시각에서는 $x = 2\sin t \cos t = 0$이 저절로 성립한다. 따라서 입자는 정확히 두 시각 $t = \frac{\pi}{2}$와 $t = \frac{3\pi}{2}$에만 원점에 있고 다른 시각에는 원점에 있지 않으며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

소문항 (ii)

속도가 변위(displacement)에 수직인 것은 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$일 때이다(이때 "수직"이 의미를 가지려면 두 벡터가 모두 영벡터가 아니어야 한다). 이제

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= 2\sin 2t\cos 2t - 4\sin t\cos t\\ &= 2\sin 2t\cos 2t - 2\sin 2t\\ &= 2\sin 2t\,(\cos 2t-1)\\ &= -4\sin 2t\,\sin^2 t,\end{aligned}$$

이고, 여기서 $\cos 2t - 1 = -2\sin^2 t$를 이용하였다. 이 값은 $\sin 2t = 0$ 또는 $\sin t = 0$일 때, 즉

$$t = 0,\ \tfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

에서 O이 된다.

> **?** **생각해 보기** $t=\frac{\pi}{2}$와 $t=\frac{3\pi}{2}$가 정말 이 목록에 들어가야 할까?

그렇지 않다. 소문항 (i)에 따르면 이 시각에 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$인데, 영벡터(zero vector)는 방향이 없으므로 의미 있는 뜻에서 어떤 벡터와도 수직일 수 없다. 스칼라곱이 O이 되는 것은 자명한 이유 때문일 뿐이다. $t=0$에서는 $\mathbf{r}=2\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$이고, $t=\pi$에서는 $\mathbf{r}=-2\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$이다. 이들은 진정으로 수직인, 영벡터가 아닌 벡터들이다. 따라서 속도가 변위에 수직인 시각은

$$t=0 \quad \text{그리고} \quad t=\pi.$$

이다.

소문항 (iii)

먼저 $\mathbf{v}$는 결코 영벡터가 아니다. $\mathbf{v}=\mathbf{0}$이 되려면 $\sin t=0$이어야 하는데, 그러면 $\cos 2t = 1-2\sin^2 t = 1 \neq 0$이기 때문이다.

영벡터가 아닌 두 벡터 (x,y)와 (v_x,v_y)가 평행할 필요충분조건은 $xv_y - yv_x = 0$이다. 여기서

$$\begin{aligned}xv_y - yv_x &= \sin 2t\,(-2\sin t) - 2\cos t\,(2\cos 2t)\\ &= -4\sin^2 t\cos t - 4\cos t\,(1-2\sin^2 t)\\ &= -4\cos t\,(1-\sin^2 t)\\ &= -4\cos^3 t.\end{aligned}$$

이다. 이 값은 $\cos t=0$일 때에만 O이 되는데, 소문항 (i)에 의해 이는 입자가 원점에 있을 때에만 일어난다. 따라서 입자가 원점에 있지 않을 때에는 언제나 $\cos t\neq 0$이므로 이 조합은 O이 아니고, 속도는 변위와 평행하지 않다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (iv)

$c = \cos^2 t$로 놓으면 $0 \le c \le 1$이다. 그러면

$$|\mathbf{r}|^2 = \sin^2 2t + 4\cos^2 t = 4\sin^2 t \cos^2 t + 4\cos^2 t = 4c(1-c) + 4c = 4c(2-c).$$

이다. 이차식 $4c(2-c)$는 꼭짓점(vertex)이 $c = 1$에 있고 $[0,1]$에서 증가하므로, 이 구간에서의 최댓값은 $c = 1$일 때이며 $|\mathbf{r}|^2 = 4$이다. 따라서 원점으로부터의 최대 거리는

$$|\mathbf{r}|_{\max} = 2,$$

이고, 이는 $\cos^2 t = 1$일 때, 즉 $t = 0$과 $t = \pi$에서 점 $(0, \pm 2)$에서 얻어진다. 이 시각들이 소문항 (ii)에서 구한 시각과 정확히 일치한다는 것은 안심이 되는 결과이다. 거리가 최대인 곳에서는 속도의 지름 방향 성분(radial component)이 0이 되어야 하기 때문이다.

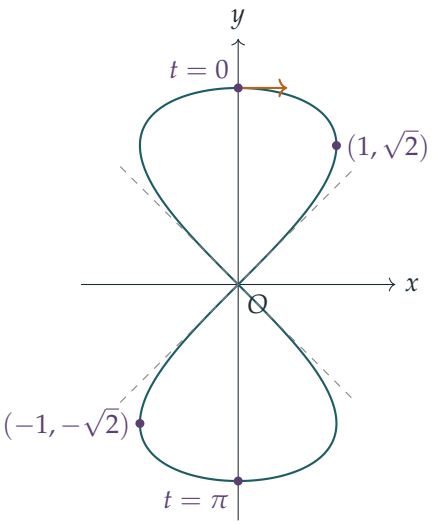
개형을 그리기 위해 t를 소거하자. $x = y\sin t$이고 $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{4}y^2$이므로

$$x^2 = y^2\left(1 - \frac{y^2}{4}\right), \qquad \text{즉,} \qquad 4x^2 = y^2(4 - y^2).$$

이다. 개형에 나타내야 할 특징은 다음과 같다.

- 곡선은 두 축에 대하여 모두 대칭이고, $-2 \le y \le 2$이다.
- $|x| = |\sin 2t| \le 1$이고, $y = \pm\sqrt{2}$일 때 $|x| = 1$이다.
- 원점 근처에서 $4x^2 \approx 4y^2$이므로, 곡선은 원점에서 직선 $y = \pm x$를 따라 스스로 교차한다. 이는 $t = \frac{\pi}{2}$에서의 속도 $-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$와 $t = \frac{3\pi}{2}$에서의 속도 $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$와 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 보였듯이 $(0, \pm 2)$에서 경로는 수평이다.

t를 따라가 보면, 입자는 $(0,2)$에서 $+\mathbf{i}$ 방향으로 출발하여 위쪽 고리의 오른쪽을 따라 원점까지 내려오고, 아래쪽 고리를 (왼쪽부터) 돌아 다시 원점으로 온 뒤, 마지막으로 위쪽 고리의 왼쪽을 따라 올라간다. 이 경로는 8자 모양(figure of eight)이다.



검산

- $t = \frac{\pi}{4}$일 때: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$이고, 이는 $4x^2 = 4 = y^2(4 - y^2) = 2 \cdot 2$를 만족하며, $|\mathbf{r}| = \sqrt{3} < 2$로 $4c(2 - c) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3$과 일치한다.
- $[0, 2\pi)$에서 t를 촘촘하게 표본 추출하면 최대 거리는 2.000이고, 거리가 거의 0이 되는 것은 $t \approx 1.57$과 4.71에서뿐이며, 무작위로 고른 시각에서 항등식 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = -4 \sin 2t \sin^2 t$와 $xv_y - yv_x = -4 \cos^3 t$가 성립함을 확인할 수 있다. 최소 속력은 약 1.32이므로 $\mathbf{v}$는 결코 영벡터가 아니다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $t = \frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$를 답에 포함하는 것: 이 시각에 스칼라곱이 0이 되는 것은 단지 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$이기 때문이다.
- 소문항 (iii)에서 $\mathbf{v}$가 결코 영벡터가 아님을 확인하지 않는 것: 속도가 영벡터라면 모든 벡터와 "평행"하게 된다.
- 두 고리를 좌우로 나란히 그리는 것: y의 범위는 $[-2, 2]$이지만 x의 범위는 $[-1, 1]$뿐이므로, 8자는 원점의 위아래에 고리가 있는 세로 모양이다.

STEP 너머

양 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2$과 $xv_y - yv_x$는 각각 운동의 지름 방향 부분과 (단위 질량당) 원점에 대한 각운동량(angular momentum)이다. 극좌표(polar coordinates)로 나타내면 후자는 $r^2\dot{\theta}$이다. 소문항 (iii)은 각운동량이 원점에서만 0이 된다는 것을 말해 주므로, 입자는 결코 O를 향해 곧장 다가가거나 곧장 멀어지는 방향으로 움직이지 않는다. 이 곡선 자체는 제로노의 렘니스케이트(lemniscate of Gerono)로, 여러 고전적인 8자 곡선 가운데 하나이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 바로 이러한 관점에서 극좌표와 각운동량을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.