풀이

STEP I 2005, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

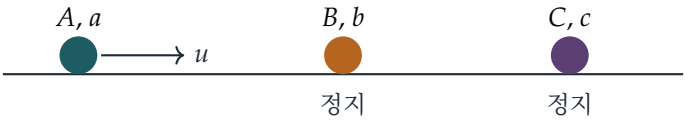
> **STEP I 2005, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q10

핵심 아이디어

각 충돌(collision)은 매끄러운(smooth) 두 입자 사이의 직접 충돌(direct impact)이므로, 방정식 두 개를 얻는다. 하나는 직선 방향의 운동량 보존(conservation of momentum)이고, 다른 하나는 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law), 즉 (분리 속력(separation speed) $=e\times$ 접근 속력(approach speed))이다. 일반적인 두 입자에 대해 이 방정식들을 한 번 풀어 두면, 그 공식을 두 번째 충돌에도 다시 쓸 수 있다. 특수한 경우들에서 진짜 문제는 두 번의 충돌로 이야기가 끝나는지 여부이다. 최종 속도를 구해야 하므로, 어떤 입자도 앞의 입자를 따라잡지 않는다는 것을 확인해야 한다.

풀이

A, B, C를 매끄러운 면 위의 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. 따라서 수평 방향의 외력은 작용하지 않고, 각 충돌에서 직선 방향의 운동량이 보존된다. u의 방향을 양의 방향으로 잡는다. B와 충돌한 뒤 A의 속도를 p, C와 충돌한 뒤 B의 속도를 q라 하자.



첫 번째 충돌: v 구하기

충돌 전에 A의 속도는 u이고 B는 정지해 있다. 충돌 후 두 입자의 속도는 각각 p와 v이다. 운동량 보존과 뉴턴의 법칙으로부터

$$au = ap + bv, \qquad v - p = eu.$$

$p = v - eu$를 첫 번째 식에 대입하면 $au = av - aeu + bv$이므로

$$v = \frac{a(1+e)u}{a+b}, \qquad p = v - eu = \frac{(a-eb)u}{a+b}.$$

$v > 0$이므로 B는 실제로 C를 향해 움직인다.

두 번째 충돌: w 구하기

이것은 B(질량 b, 속력 v)가 C(질량 c, 정지)에 부딪히는 똑같은 상황이다. 따라서 위의 공식에서 $a \to b, b \to c, u \to v$로 바꾸어 다시 쓸 수 있다.

$$w = \frac{b(1+e)v}{b+c}, \qquad q = \frac{(b-ec)v}{b+c}.$$

v를 대입하면

$$w = \frac{b(1+e)}{b+c} \cdot \frac{a(1+e)u}{a+b} = \frac{abu(1+e)^2}{(a+b)(b+c)},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

이 두 번의 충돌 뒤 속도는 p, q, w이다. 충돌이 더 일어나는 것은 $p > q$(A가 B를 따라잡음)이거나 $q > w$(B가 C를 따라잡음)인 경우뿐이다. 뉴턴의 법칙에 의해 $q - w = -ev < 0$이므로 두 번째 경우는 결코 일어나지 않는다. 따라서 p와 q만 비교하면 된다.

> **생각해 보기** 왜 두 번의 충돌에서 그냥 멈추고 p, q, w를 답으로 제시하면 안 되는가?

문제가 **최종** 속도를 묻기 때문이다. 충돌 후에도 A가 B보다 빠르게 움직이고 있다면 A는 B에 다시 부딪히고, 모든 것이 달라진다. 따라서 각 경우에 $p \le q$임을 확인해야 한다.

소문항 (i)

여기서는 $a = eb$이고 $b = ec$이다(질량이 양수이므로 $e > 0$). 그러면 $a - eb = 0$이고 $b - ec = 0$이므로

$$p = 0, \qquad q = 0.$$

w에 대해서는 $a + b = b(1+e)$와 $b + c = b + b/e = b(1+e)/e$를 이용한다.

$$w = \frac{eb \cdot b\,u(1+e)^2}{b(1+e) \cdot b(1+e)/e} = e^2 u.$$

A와 B는 모두 정지해 있고 C는 멀어지므로 더 이상의 충돌은 없다. 최종 속도는

$$A:\ 0, \qquad B:\ 0, \qquad C:\ e^2 u.$$

각 충돌은 운동량 전부를 다음 입자에 넘겨준다. 뒤쪽에 더 가벼운 입자들이 있는 뉴턴의 요람(Newton's cradle)과 같다.

소문항 (ii)

이제 $b = ea$이고 $c = eb = e^2a$이다. 그러면 $1 - e^2 = (1-e)(1+e)$를 이용하여

$$v = \frac{a(1+e)u}{a(1+e)} = u, \qquad p = \frac{(a - e^2a)u}{a(1+e)} = (1-e)u,$$

를 얻는다. 두 번째 충돌에서 질량 b, c의 비는 a, b의 비와 같고 B는 속력 u로 도달하므로, 이 충돌은 첫 번째 충돌의 정확한 복제이다.

$$w = u, \qquad q = (1-e)u.$$

(직접 계산하면 $w = \dfrac{a \cdot ea \cdot u(1+e)^2}{a(1+e) \cdot ea(1+e)} = u$이다.)

이제 $p = q$이므로 A는 결코 B를 따라잡지 않는다. 또 $e > 0$이면 $q = (1-e)u < u = w$이므로 B는 결코 C를 따라잡지 않는다. 최종 속도는

$$A: \ (1-e)u, \qquad B: \ (1-e)u, \qquad C: \ u,$$

이고, 모두 A의 원래 운동 방향이다.

검산

- (ii)의 운동량: $a(1-e)u + ea(1-e)u + e^2a\,u = au$. (i)에서는 $c \cdot e^2u = e^2c\,u = au$.
- (ii)에서 $e = 1$(완전 탄성(perfectly elastic))이면, A와 B는 정지하고 C는 u로 움직여 나간다. 운동 에너지(kinetic energy)가 보존된다. $\frac{1}{2}au^2 = \frac{1}{2}cu^2$이려면 $c = a$이어야 하고, 이는 정확히 $e = 1$일 때의 $c = e^2a$이다.
- 수치 예: $e = \frac{1}{2}$, 질량 $1, 2, 4$, $u = 1$(소문항 (i))이면 최종 속도는 $0, 0, \frac{1}{4}$이다. 질량 $4, 2, 1$(소문항 (ii))이면 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$이다. 수천 개의 무작위 질량과 e 값에 대해, 추가 충돌까지 모두 시뮬레이션하며 정확한 산술로 이 결과들과 v, w의 일반 공식을 확인하였다.

흔한 실수

- 뉴턴의 법칙을 쓸 때 속도의 순서를 거꾸로 쓰는 것. 올바른 식은 충돌 후의 (앞 입자의 속력 − 뒤 입자의 속력) $= e \times$ 충돌 전의 (뒤 − 앞)이다.
- A가 B를 다시 따라잡는지 확인하지 않고 두 번의 충돌 뒤의 속도를 답으로 제시하는 것.

STEP 너머

연쇄 충돌은 운동량과 에너지가 물질 속을 어떻게 전달되는지를 보여 주는 가장 단순한 모형이며, 소문항 (i)의 질량비는 운동량 **전부**가 마지막 입자에 모이도록 선택된 것이다. 질

량을 반대 순서로, 즉 무거운 것을 뒤에, 가벼운 것을 앞에 두고 e를 1에 가깝게 하면 마지막 입자가 첫 입자보다 빠르게 움직인다. 큰 공 위에 작은 공을 올려놓고 함께 떨어뜨리면 작은 공이 하늘 높이 튀어 오르는 장난감의 원리가 바로 이것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)를 이용해 충돌을 다루는데, 이렇게 하면 v와 w 같은 공식이 거의 자명해진다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.