풀이

STEP I 2005, 문제 1

순수수학 • 자릿수의 합 세기

> **STEP I 2005, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q1

핵심 아이디어

다섯 자리 수의 자릿수의 합(digit sum)이 가질 수 있는 가장 큰 값은 $9 \times 5 = 45$이고, 두 목표 합은 모두 이 값에 가깝다. 따라서 각 자릿수 자체를 세는 대신, 각 자릿수가 9에 얼마나 **모자라는지**를 센다. 이 부족분(shortfall)은 작은 음이 아닌 정수(non-negative integer)이고 그 합은 작은 고정된 값이므로, 경우를 나열하거나 "별과 막대(stars and bars)" 기법을 쓰면 쉽게 셀 수 있다.

풀이

수를 $d_1d_2d_3d_4d_5$로 쓰자. 여기서 $d_1 \in \{1,\dots,9\}$이고(맨 앞자리는 영이 될 수 없다) $d_2,\dots,d_5 \in \{0,\dots,9\}$이다. 이제

$$e_i = 9 - d_i \qquad (i = 1,\dots,5),$$

를 i번째 자릿수의 **부족분**이라 하자. 각 e_i는 $0 \le e_i \le 9$인 정수이고 ($d_1 \ge 1$이므로 $e_1 \le 8$이다),

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 45 - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5).$$

이다. 서로 다른 수는 서로 다른 목록 $(e_1,\dots,e_5)$를 주고 그 역도 성립하므로, 자릿수의 합이 S인 수를 세는 것은 합이 $45 - S$인 부족분의 순서 있는 목록(ordered list)을 세는 것과 같다.

소문항 (i)

자릿수의 합이 43이라는 것은 부족분의 합이 $45 - 43 = 2$라는 뜻이다. 2를 음이 아닌 부분들로 나누는 방법은 두 가지뿐이다.

- **한 자릿수의 부족분이 2이고 나머지는 0인 경우.** 한 자릿수는 7이고 나머지 네 자릿수는 9이다. 7은 5개의 자리 중 어느 곳에나 올 수 있으므로 5개의 수가 있다(79999, 97999, ..., 99997).
- **두 자릿수의 부족분이 각각 1이고 나머지는 0인 경우.** 두 자릿수는 8이고 나머지 세 자릿수는 9이다. 5개의 자리 중 8이 들어갈 2개의 자리를 고르면 되므로 $\binom{5}{2} = 10$개의 수가 있다(88999, 89899, ..., 99988).

모든 자릿수가 7 이상이므로 맨 앞자리는 절대 0이 아니고, 따라서 이 수들은 모두 실제로 다섯 자리 수이다. 두 경우는 겹치지 않으며 모든 가능성을 포함하므로,

$$5 + 10 = 15$$

개의 다섯 자리 수가 자릿수의 합 43을 가진다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

이번에는 부족분의 합이 $45 - 39 = 6$이어야 한다. $6 \leq 8$이므로 어떤 부족분도 한계를 넘을 수 없다. $e_1 \leq 6 \leq 8$이므로 $d_1 \geq 3$이고, $e_i \leq 6 \leq 9$이므로 나머지 자릿수도 3과 9 사이에 있다. 따라서 다음 방정식의 순서 있는 해의 개수만 구하면 된다.

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 6, \qquad e_i \geq 0\text{인 정수.}$$

? **생각해 보기** 이 해들을 모두 나열하지 않고 어떻게 셀 수 있을까?

6개의 별을 한 줄로 놓고 4개의 막대로 5개의 묶음으로 나눈다고 생각하자.

$$\star\star\,|\,|\,\star\,|\,\star\star\star\,| \quad \text{는 다음을 나타낸다:} \quad (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (2, 0, 1, 3, 0).$$

6개의 별과 4개의 막대를 배열하는 각 방법은 정확히 하나의 해를 주고, 각 해는 정확히 하나의 배열에서 나온다. 배열은 10개의 자리 중 막대가 놓일 4개의 자리를 고르면 정해지므로, 해의 개수는

$$\binom{10}{4} = 210.$$

이다. 따라서 자릿수의 합이 39인 다섯 자리 수는 **210**개이다.

소문항 (i)처럼 경우를 나누어 세고 싶다면, 6을 다섯 개 이하의 양의 부분으로 나누는 방법을 나열하고 각각의 배열 수를 세면 된다.

부족분	개수	부족분	개수
6	5	$3,2,1$	$5\cdot 4\cdot 3 = 60$
$5,1$	$5\cdot 4 = 20$	$3,1,1,1$	$5\cdot 4 = 20$
$4,2$	$5\cdot 4 = 20$	$2,2,2$	$\binom{5}{2} = 10$
$4,1,1$	$5\cdot \binom{4}{2} = 30$	$2,2,1,1$	$\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$
$3,3$	$\binom{5}{2} = 10$	$2,1,1,1,1$	5

합계는 $5+20+20+30+10+60+20+10+30+5 = 210$으로, 별과 막대로 구한 값과 일치한다. ($6$의 분할(partition) $1,1,1,1,1,1$은 여섯 자릿수가 필요하므로 나타나지 않는다.)

검산

- 별과 막대로 소문항 (i)의 결과도 다시 얻을 수 있다. 부족분의 합이 2이면 $\binom{6}{4} = 15$이다.
- 극단적인 경우도 맞는다. 부족분의 합이 0이면 $\binom{4}{4} = 1$개의 수(99999)가 있고, 부족분의 합이 1이면 $\binom{5}{4} = 5$개가 있다.
- 컴퓨터로 $90\,000$개의 다섯 자리 수를 모두 조사하면 자릿수의 합이 43인 수는 정확히 15개, 39인 수는 정확히 210개이며, 경우별 개수도 위의 표와 같다.

흔한 실수

- $\{8,8,9,9,9\}$를 수 하나로, 또는 5개로 세는 것. 자릿수의 순서가 중요하며, 배열은 $\binom{5}{2} = 10$가지이다.
- 맨 앞자리를 확인하지 않는 것. 여기서는 모든 자릿수가 3 이상이므로 맨 앞자리가 0이 될 수 없다. 그러나 자릿수의 합이 더 작으면(예를 들어 20) 별과 막대는 너무 많이 세게 되므로, $d_1 = 0$인 경우나 9보다 큰 자릿수가 있는 경우를 빼야 한다.

STEP 너머

n을 k개의 음이 아닌 정수의 순서 있는 합으로 나타내는 방법의 수는 $\binom{n+k-1}{k-1}$이고, 이는 $(1+x+x^2+\cdots)^k$에서 x^n의 계수이다. 각 자릿수를 9 이하로 제한하면 이 식은 $(1+x+\cdots+x^9)^k$로 바뀌고, 이 상한은 포함배제의 원리(inclusion–exclusion principle)로 처리한다. 이러한 생성함수(generating function) 방법은 대학 1학년 조합론(combinatorics)의 기본이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*와 Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 자릿수 문제와 세기 문제를 계속 탐구하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.