풀이

STEP III 2004, 문제 9

역학 • 힘의 모멘트와 마찰

> **STEP III 2004, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q9

핵심 아이디어

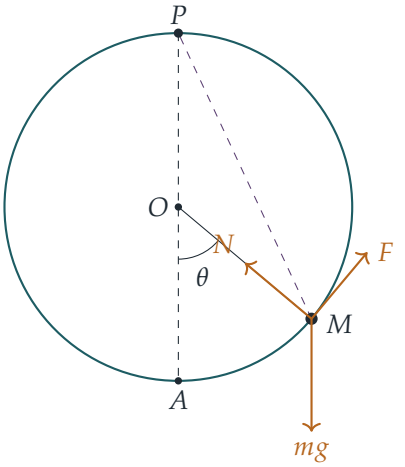
고리의 무게는 회전축 바로 아래에 있는 O를 지나므로 P에 대한 모멘트(moment)가 없다. 고리에 작용하는 다른 힘은 (회전축에서의 반력을 제외하면) 쥐가 가하는 접촉력(contact force)뿐이다. 따라서 고리가 그대로 머무는 것은 이 접촉력의 P에 대한 모멘트가 0일 때, 즉 그 작용선(line of action)이 P를 지날 때와 정확히 같다. 나머지는 모두 쥐의 접촉력이 언제 MP 방향을 향할 수 있는지를 묻는 데서 나온다. 한 번은 속력에 대해, 또 한 번은 마찰의 한계에 대해 묻는다.

풀이

모형

쥐를 질량 m인 입자로, 고리를 P를 지나는 매끄러운 수평 회전축에 대하여 자유롭게 도는 강체(rigid) 고리로 본다(고리의 질량은 결국 상관없음이 드러난다). 연직 아래 방향에서부터 잰 각을 $\theta = \angle AOM$이라 하고, 쥐는 θ가 증가하는 방향으로 달린다고 하자. 고리가 정지해 있는 동안 쥐는 O를 중심으로 하는 반지름 a인 고정된 원 위를 일정한 속력 u로 움직인다.

쥐에 작용하는 힘은 무게 mg, 고리가 O 쪽으로 가하는 수직항력(normal reaction) N, 그리고 접선 방향의 마찰력(friction) F이다. F는 θ가 증가하는 방향(고리를 따라 위쪽)을 양의 방향으로 잡는다.



쥐에 대하여 접선 방향(속력이 일정하므로 접선 방향 가속도는 없다)과 반지름 방향(O 쪽으로 가속도 u^2/a)으로 힘을 분해하면 다음을 얻는다.

$$F = mg\sin\theta,$$
$$N - mg\cos\theta = \frac{mu^2}{a}.$$

고리는 언제 평형을 이루는가?

뉴턴 제3법칙(Newton's third law)에 의해 쥐는 쥐에 작용하는 접촉력(N과 F)과 크기가 같고 방향이 반대인 힘으로 고리를 민다. 고리의 무게는 P의 연직 아래에 있는 O에 작용하고 회전축의 반력은 P에 작용하므로, 둘 다 P에 대한 모멘트가 없다. 따라서 고리가 POA가 연직인 상태로 평형(equilibrium)을 유지할 필요충분조건은 접촉력의 P에 대한 모멘트가 0인 것, 즉 접촉력의 작용선이 P를 지나는 것이다.

삼각형 OPM은 이등변삼각형(isosceles triangle)이고($OP = OM = a$) $\angle POM = \pi - \theta$이므로 $\angle OMP = \frac{1}{2}\theta$이다. 따라서 직선 MP는 반지름 MO와 각 $\frac{1}{2}\theta$를 이루며 θ가 증가하는 방향으로 기울어 있다. 그러므로 쥐에 작용하는 접촉력이 MP 방향을 향하는 것은 정확히 다음이 성립할 때이다.

$$\frac{F}{N} = \tan\tfrac{1}{2}\theta. \qquad (*)$$

(같은 내용을 P에 대한 모멘트를 직접 계산해서 얻을 수도 있다. 쥐가 고리에 가하는 힘의 모멘트는 $a[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)]$이고, $\sin\theta/(1+\cos\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta$이다.)

생각해 보기 이것을 어떻게 u에 대한 조건으로 바꿀 수 있을까?

운동 방정식을 이용한다. 쥐에 작용하는 접촉력은 쥐의 질량과 가속도의 곱에서 무게를 뺀

것이다.

$$\mathbf{R} = m \cdot \frac{u^2}{a}\,\widehat{MO} + mg\,\hat{\text{위}}.$$

그런데 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} = a\,\widehat{MO} + a\,\hat{\text{위}}$이고, 두 계수가 같다. 따라서 모든 θ에 대하여 $\mathbf{R}$이 MP와 평행할 필요충분조건은 $u^2/a = g$, 즉

$$u = \sqrt{ag}.$$

대수적으로 확인하면 다음과 같다. $u^2 = ag$일 때 운동 방정식에서 $F = mg\sin\theta$, $N = mg(1+\cos\theta)$이므로

$$\frac{F}{N} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다. 일반적인 속력에 대해서는 P에 대한 모멘트가 $m\sin\theta\,(u^2 - ag)$로 계산되며, 이것이 모든 위치에서 0이 되는 것은 $u^2 = ag$일 때뿐이다. 따라서 고리가 이 마찰력을 실제로 제공할 수만 있다면, 쥐는 요구한 대로 속력 $\sqrt{ag}$로 달려서 고리를 평형 상태로 유지할 수 있다. 다음에는 이 점을 살펴본다.

마찰의 한계

쥐의 발이 미끄러지지 않고 붙어 있는 것은 $|F| \le \mu N$인 동안뿐이다. $u = \sqrt{ag}$이고, $\cos\frac{1}{2}\theta > 0$이 되도록 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$인 아래쪽 부분에서는 이 조건이 다음과 같다.

$$\tan\tfrac{1}{2}|\theta| \le \mu \quad\Longleftrightarrow\quad |\theta| \le 2\arctan\mu.$$

따라서 $\angle AOM = 2\arctan\mu$가 될 때까지는 모든 것이 잘 된다. (이 점은 $\mu < 1$일 때만 고리의 아래쪽 절반에 있다. $\mu \ge 1$이면 쥐는 이 점에 이르지 않는다.)

이 점을 지나면 어떤 속력을 택해도 소용없다. 평형을 이루려면 $F/N = \tan\frac{1}{2}\theta > \mu$이어야 하는데, 마찰력은 이것을 만들어 낼 수 없다. 어떤 속력이든, 그리고 $|F| \le \mu N$을 만족하는 어떤 마찰력이든, 쥐가 고리에 가하는 힘의 P에 대한 모멘트는

$$a[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)] \;\ge\; aN(1+\cos\theta)(\tan\tfrac{1}{2}\theta - \mu) > 0.$$

무슨 일이 일어나는가

쥐가 $\angle AOM = 2\arctan\mu$를 지나면 더 이상 충분히 세게 붙잡을 수 없다. 발이 미끄러지고, 마찰력은 한계값 μN으로 떨어지며, 쥐는 속력을 유지하지 못하고 뒤로 미끄러지기 시작한다. 이제 쥐가 고리에 가하는 접촉력은 P의 옆을 지나가므로 모멘트가 0이 아니고, 고리는 더 이상 평형 상태가 아니다. 고리는 P를 중심으로 회전하기 시작한다. 위의 모멘트는 쥐의 수직 방향 밀기가 줄어든 마찰력을 이기는 방향이므로, 고리는 A가 쥐가 있는 쪽, 즉 쥐가 달리던 방향으로 움직이도록 흔들린다. 그 뒤의 운동은 더 이상 단순한 평형 그림이 아니다. 고리는 P를 중심으로 흔들리고 쥐는 그 위에서 미끄러진다.

검산

- $\theta = 0$일 때 쥐는 A에 있고, 접촉력 $N = 2mg$는 연직이며 P를 지나고, 예상대로 마찰력은 필요 없다.
- 속력 $\sqrt{ag}$는 속력의 단위를 가지며, μ에도 고리의 질량에도 의존하지 않고, 수직항력을 $mg(1 + \cos\theta)$로 만들어 아래쪽 절반 전체에서 양수가 되게 한다.
- $\mu = 0.5$일 때 임계각은 $2\arctan 0.5 \approx 0.927$ rad $\approx 53.1°$이다. 이때 $\sin\theta = 0.8$, $1 + \cos\theta = 1.6$이므로 정확히 $F/N = 0.5 = \mu$이다. $u^2 = ag$로 두고 임의의 위치에서 P에 대한 모멘트를 수치적으로 확인하면 $10^{-15}mga$ 이내에서 0이 나왔다.

흔한 실수

- P 대신 O에 대한 모멘트를 취하는 것. 고리는 P를 중심으로 회전하며, (O를 지나는) 수직항력은 P에 대한 모멘트를 분명히 가진다.
- N에서 구심(centripetal) 항을 빠뜨리는 것. 그러면 $N = mg\cos\theta$가 되어 잘못된 마찰 조건을 얻는다.
- 쥐가 단순히 "떨어진다"고 주장하는 것. 아래쪽 절반에서는 내내 $N > 0$이다. 실패하는 것은 접촉이 아니라 붙잡는 힘이다.

STEP 너머

여기서 눈여겨볼 사실은, 물체가 회전축에 대하여 평형을 이루는 것은 다른 힘들의 합력이 회전축을 지날 때와 정확히 같다는 점이다. "P를 지나는 작용선" 논법은 한 쪽 분량의 힘 분해를 대신한다. 후반부는 연결계(coupled system)를 처음 맛보는 것으로, 미끄러지는 접촉을 통해 한 물체의 운동이 다른 물체의 운동으로 전달된다. 미끄러진 뒤의 운동을 분석하려면 고리의 관성 모멘트(moment of inertia)와 강체 회전의 완전한 운동 방정식이 필요하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축에 대한 토크(torque)와 마찰의 제한을 받는 운동을 모두 이런 방식으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.