풀이

STEP III 2004, 문제 8

순수수학 • 미분방정식

> **STEP III 2004, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q8

핵심 아이디어

$1/y$ 항 때문에 이 방정식은 y에 대하여 선형(linear)이 아니다. 그러나 양변에 y를 곱하면 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 y^2의 도함수(derivative)의 절반이 되고, $1/y$ 항은 x만의 함수가 된다. 따라서 $u = y^2$으로 나타내면 방정식은 선형이 되며(베르누이(Bernoulli)형 방정식), 적분인자(integrating factor)를 쓰면 풀이가 끝난다. 세 곡선은 이차곡선(conic)이 되고, 그 정체를 알아내면 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

풀이

치환

$u = y^2$이라 하자. 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\left(f(x)\,y + \frac{g(x)}{y}\right) = 2f(x)\,y^2 + 2g(x).$$

y^2을 u로 바꾸면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2f(x)\,u = 2g(x),$$

이고, 이는 u에 대하여 선형이다. 즉 u와 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$가 일차로만 나타나고, 그 계수는 x에만 의존한다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

방정식 풀기

여기서 $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = -1$이므로 선형 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}\,u = -2.$$

적분인자는 $\exp\left(-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-2\ln|x|} = \dfrac{1}{x^2}$이다. 양변에 이를 곱하면

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x^3}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

적분하면 상수 C에 대하여 $\dfrac{u}{x^2} = \dfrac{2}{x} + C$이므로, 일반해(general solution)는

$$y^2 = 2x + Cx^2.$$

(원래 방정식은 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이어야 하므로, 각 해는 0을 포함하지 않으면서 $2x + Cx^2 > 0$인 x의 구간 위에서 정의되고, 그 구간 전체에서 y의 부호는 일정하다.)

세 곡선

세 점 모두 $x > 0$이고 $y > 0$이므로, 각 해곡선은 그 점을 포함하는 양의 x 구간 위에서 $y^2 = 2x + Cx^2$의 $y > 0$인 부분이다.

$(1,1)$을 지나는 곡선: $1 = 2 + C$이므로 $C = -1$이고 $y^2 = 2x - x^2$이다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

이고, 이는 중심이 $(1,0)$이고 반지름이 1인 원이다. 해곡선은 $0 < x < 2$에서 위쪽 반원 $y = \sqrt{2x - x^2}$이다.

$(2,2)$를 지나는 곡선: $4 = 4 + 4C$이므로 $C = 0$이고 $y^2 = 2x$이다. 이는 꼭짓점이 원점이고 축이 x축인 포물선(parabola)이다. 해곡선은 $x > 0$에서 $y = \sqrt{2x}$이다.

$(4,4)$를 지나는 곡선: $16 = 8 + 16C$이므로 $C = \frac{1}{2}$이고 $y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$이다. 완전제곱식으로 고치면 $\frac{1}{2}(x+2)^2 - y^2 = 2$, 즉

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1,$$

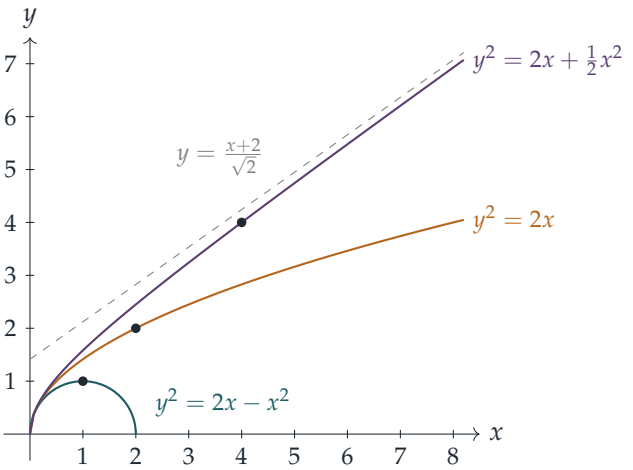
이고, 이는 중심이 $(-2,0)$, 꼭짓점이 $(0,0)$과 $(-4,0)$, 점근선(asymptote)이 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$인 쌍곡선(hyperbola)이다. 해곡선은 오른쪽 가지의 위쪽 절반, 즉 $x > 0$에서 $y = \sqrt{2x + \frac{1}{2}x^2}$이다.

? **생각해 보기** 쌍곡선의 왼쪽 가지나 아래쪽 절반은 왜 포함하지 않는가?

미분방정식(differential equation)의 해는 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서 방정식을 만족해야 하는데, 이 방정식은 $x = 0$ 또는 $y = 0$일 때 정의되지 않는다. $(4,4)$에서 출발하여 왼쪽으로 가면 곡선은 $(0,0)$에 이르고, 여기서는 두 조건이 모두 깨지므로 그 너머로 이어갈 수 없다. 왼쪽 가지($x \leq -4$)와 아래쪽 절반도 $y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$을 만족하지만, 이들은 $(4,4)$를 지나는 해가 아닌 다른 해이다.

그래프

세 곡선은 모두 원점에서 수직인 접선(tangent)을 가지며 출발하고($x = 0$ 근처에서 각각 $y \approx \sqrt{2x}$처럼 행동한다), 주어진 점에서의 기울기(gradient)는 각각 $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$, $\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이다. x가 커지면 원은 $(2, 0)$으로 다시 내려오고, 포물선은 $\sqrt{x}$처럼 증가하며, 쌍곡선은 점근선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 2)$에 가까워진다. $x > 0$일 때 $2x - x^2 < 2x < 2x + \frac{1}{2}x^2$이므로, 원은 포물선보다 아래에 있고 포물선은 쌍곡선보다 아래에 있다.



검산

- 다시 대입해 보자. $y^2 = 2x + Cx^2$이면 $2yy' = 2 + 2Cx$이므로 $y' = \frac{1+Cx}{y}$이고, 한편 $\frac{y}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y^2 - x}{xy} = \frac{x + Cx^2}{xy} = \frac{1+Cx}{y}$이다. 두 값이 일치한다.
- 원래 방정식을 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 $(4, 4)$에서 $x = 8$까지 수치적으로 풀면 $y \approx 6.92820$을 얻는데, 이는 $\sqrt{16 + 32} = \sqrt{48}$과 일치한다. $(1, 1)$과 $(2, 2)$에서 같은 방식으로 계산하면 반원 및 포물선과 약 10^{-12} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 적분인자를 x^{-2}가 아니라 x^2으로 구하는 실수. u의 계수가 $-\frac{2}{x}$이므로 지수는 $-2\ln x$이다.
- $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$에서 나오는 인수 2를 빠뜨려 $y^2 = x + Cx^2$을 얻는 실수. 이 결과는 대입 검산을 통과하지 못한다.
- 원 전체, 포물선의 위아래 두 부분, 또는 쌍곡선의 두 가지를 모두 "해곡선"으로 그리는 실수.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 모든 **베르누이 방정식**(*Bernoulli equation*) $y' = f(x)y + g(x)y^n$에 통한다. 치환 $u = y^{1-n}$을 하면 언제나 선형이 된다(여기서는 $n = -1$이므로 $u = y^2$). $x = 0$과 $y = 0$에서 주의를 기울여야 했던 것은 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)를 처음 엿보는 것이다. 우변이 잘 정의되고 좋은 성질을 갖는 각 점을 지나는 해는 정확히 하나뿐이며, 곡선족은 그렇지 않은 점에서만 만날 수 있다. 우리의 곡선들이 모두 원점에서 만나는 것이 바로 그런 경우이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 베르누이 방정식과 이 정리를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.