풀이

STEP III 2004, 문제 7

순수수학 • 점화 공식

STEP III 2004, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q7

핵심 아이디어

I_{n+1}의 피적분함수(integrand)는 I_n의 피적분함수에 $\frac{t}{t+1}$을 곱한 것이므로, 이 인수 하나의 상계를 구하면 이웃한 두 적분 사이의 부등식을 얻는다. 부분적분(integration by parts)으로는 두 적분 사이의 정확한 관계식도 얻을 수 있으며, 이 부등식과 등식을 나란히 놓으면 I_n만에 대한 상계가 나온다. 정확한 관계식을 연쇄적으로 더하면 중간 항이 상쇄되어(telescoping) 이미 알고 있는 로그 값인 I_1까지 내려가고, 이로써 모든 것이 제어 가능한 오차항(error term)을 가진 $\ln 2$의 급수(series)로 바뀐다.

풀이

부등식 $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$

$0 \le t \le 1$에서

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

이고, 이는 t에 대하여 증가하므로 최댓값은 $\frac{1}{2}$이며 이 값은 $t = 1$에서만 취한다. 이제 I_{n+1}의 피적분함수를

$$\frac{t^n}{(t+1)^{n+1}} = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n}$$

로 쓴다. 따라서

$$\frac{1}{2} I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{t+1} \right) \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n} \, \mathrm{d}t$$

이다. 여기서 피적분함수는 연속이고, 음이 되는 일이 없으며, $0 < t < 1$에서는 순양수이다(그 구간에서 두 인수가 모두 양수이기 때문이다). 그러므로 적분값은 순양수이고, $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$이다.

생각해 보기 $\frac{t}{t+1}$이 실제로 $\frac{1}{2}$에 도달하는데도 부등식이 엄격한 이유는 무엇인가?

$\frac{1}{2}$에 도달하는 것은 단 한 점 $t=1$에서뿐이다. 음이 아닌 연속함수가 어떤 구간 전체에서 양수이면 그 적분은 양수이므로, 등호가 성립하는 점 하나는 아무런 영향을 주지 않는다.

점화식

$u = t^n$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (t+1)^{-(n+1)}$로 두고 I_{n+1}을 부분적분하면 $v = -\dfrac{1}{n(t+1)^n}$이다($n \geq 1$이므로 성립한다).

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[-\frac{t^n}{n(t+1)^n}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{n(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n\,2^n} + I_n, \end{aligned}$$

대괄호 안의 값은 $t=1$에서 $-\frac{1}{n2^n}$이고 $t=0$에서 0이기 때문이다. 이것이 구하려던 점화식(recurrence)이다.

I_n의 상계

점화식을 부등식에 대입하면

$$I_n - \frac{1}{n\,2^n} = I_{n+1} < \frac{1}{2}I_n \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}I_n < \frac{1}{n\,2^n} \quad\Longrightarrow\quad I_n < \frac{1}{n\,2^{n-1}}.$$

$\ln 2$의 급수

먼저

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2.$$

점화식에 따르면 각 $r \geq 1$에 대하여 $I_r - I_{r+1} = \dfrac{1}{r\,2^r}$이다. 이 식들을 $r = 1, \ldots, n$에 대하여 더하면 좌변의 중간 항이 모두 상쇄된다.

$$I_1 - I_{n+1} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r}, \qquad \text{따라서} \qquad \ln 2 = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} + I_{n+1}.$$

범위 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$

나머지(remainder)에 대하여 두 가지 사실을 알고 있다. 피적분함수가 $(0,1]$에서 양수이므로 $I_{n+1} > 0$이고, 앞의 상계에서 n 대신 $n+1$을 넣으면 $I_{n+1} < \dfrac{1}{(n+1)2^n}$이다. 따라서 모든 n에 대하여

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} < \ln 2 < \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} + \frac{1}{(n+1)2^n}$$

이다. 부분합(partial sum)은 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}, \qquad \frac{5}{8}+\frac{1}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

생각해 보기 각 경계에 대하여 n을 어떤 값으로 잡아야 하는가?

서로 다른 값을 잡는다. 하계에는 $n=3$을 택하여 $\ln 2 > \frac{2}{3}$을 얻는다. 상계에는 $n=2$를 택하는데, 이때 오차의 상계는 $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$이다.

$$\ln 2 < \frac{5}{8}+\frac{1}{12}=\frac{15}{24}+\frac{2}{24}=\frac{17}{24}.$$

두 결과를 합하면 요구한 대로 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$이다.

검산

수치적으로 $\ln 2 \approx 0.6931$이며, 이는 실제로 $\frac{2}{3} \approx 0.6667$과 $\frac{17}{24} \approx 0.7083$ 사이에 있다. 심프슨(Simpson) 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $I_3 \approx 0.0681$로 상계 $\frac{1}{12} \approx 0.0833$보다 충분히 작고, 실제로 $\frac{5}{8}+0.0681=0.6931$이다. 또한 n이 24 이하인 경우에 대하여 점화식과 두 부등식을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 두 경계에 같은 n을 쓰는 것: $n=3$을 쓰면 상계 $\frac{2}{3}+\frac{1}{32}=\frac{67}{96}$을 얻는데, 이는 참이고 더 정밀하지만 문제에서 요구한 $\frac{17}{24}$는 아니다.
- 부분적분에서 경계항(boundary term)의 부호를 틀리는 것. v는 음수이다.
- $I_{n+1} > 0$인 이유를 밝히지 않는 것. 엄격한 하계를 얻으려면 이 사실이 필요하다.

STEP 너머

이것은 급수 $\ln 2 = \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r2^r}$로, $-\ln(1-x)=\sum x^r/r$에 $x=\frac{1}{2}$를 대입한 것이며, 처음 n개 항 뒤의 나머지에 대한 명시적인 상계를 함께 준다. 나머지를 적분으로 추정하는 것은 바로 적분형 나머지(integral remainder)를 갖는 테일러(Taylor) 정리(Taylor's theorem)의 작동 방식이며, 대학 1학년 해석학(analysis)의 기본 내용이다. 거듭제곱급수(power series)와 그 나머지에 관한 이론은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.