풀이

STEP III 2004, 문제 6

순수수학 • 점화식

> **STEP III 2004, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q6

핵심 아이디어

식 F_n은 **연속한 두 항의 쌍**마다 정해지는 양이고, 첫 번째 항등식(identity)은 한 쌍에서 다음 쌍으로 넘어갈 때 이 값이 언제 그대로 유지되는지를 정확히 알려 준다. (i)의 점화식(recurrence)에서는 두 번째 인수가 0이 되므로 F_n은 불변량(invariant)이고, 처음 값만 구하면 된다. (ii)에서는 논증을 거꾸로 진행한다. F_n이 일정하면 곱이 0이어야 하므로, 매 단계에서 두 인수 중 하나는 0이다. 그러면 단계마다 선택이 생기고, 주기(period)가 4인 수열은 이 선택을 잘 하는 데서 나온다.

풀이

항등식

두 항을 모두 전개하면 w_{n-1}^2 항이 소거된다.

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= (w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}) - (w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - 4w_{n-1}w_{n-2}) \\ &= (w_n^2 - w_{n-2}^2) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2}) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2} - 4w_{n-1}), \end{aligned}$$

이 식은 $n \geq 2$일 때 성립하고(w_{n-2}가 존재해야 하므로), 이것이 보이려던 것이다.

풀이 내내 쓸모 있는 관찰을 하나 더 해 두자. F_n은 w_n과 w_{n-1}에 대하여 **대칭**(symmetric)이다. 둘을 서로 바꾸어도 $w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}$은 변하지 않는다.

소문항 (i)

$w_n = u_n$으로 두고, 이에 대응하는 양을 F_n이라 하자. $n \geq 2$일 때 점화식에 의해 $u_n + u_{n-2} - 4u_{n-1} = 0$이므로 항등식의 두 번째 인수가 0이고,

$$F_n = F_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $F_n = F_1$이고,

$$F_1 = u_1^2 + u_0^2 - 4u_1u_0 = 4 + 1 - 8 = -3.$$

그러므로 모든 $n \geq 1$에 대하여 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$, 즉 $u_n^2 + u_{n-1}^2 = 4u_nu_{n-1} - 3$이고, 이것이 보이려던 것이다. (수열은 $1, 2, 7, 26, 97, \ldots$로 이어진다.)

소문항 (ii)(a)

$(*)$에 $n = 1$과 $v_0 = 1$을 대입하면

$$v_1^2 + 1 = 4v_1 - 3 \iff v_1^2 - 4v_1 + 4 = 0 \iff (v_1 - 2)^2 = 0,$$

이므로 $v_1 = 2$이다. 중근(repeated root)이므로 여기에는 선택의 여지가 없다.

이제 $w_n = v_n$으로 두자. 조건 $(*)$는 바로 모든 $n \geq 1$에 대하여 $F_n = -3$이라는 뜻이다. 따라서 $n \geq 2$이면 F_n과 F_{n-1}이 모두 -3이고, 항등식에 의해

$$0 = F_n - F_{n-1} = (v_n - v_{n-2})(v_n + v_{n-2} - 4v_{n-1}).$$

두 실수의 곱이 0이 되는 것은 둘 중 하나가 0일 때뿐이므로, $v_n = v_{n-2}$ 또는 $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}$이고, 이것이 보이려던 것이다.

? 생각해 보기 이것이 전부일까? 두 경우 모두 정말로 올바른 다음 항을 줄까?

그렇다. v_{n-1}을 고정하면 조건 $(*)$는 $x = v_n$에 대한 이차방정식(quadratic) $x^2 - 4v_{n-1}x + (v_{n-1}^2 + 3) = 0$이다. F가 대칭이고 $F_{n-1} = -3$이므로 $x = v_{n-2}$가 근이라는 것을 안다. 두 근의 합은 $4v_{n-1}$이므로 다른 근은 $4v_{n-1} - v_{n-2}$이다. 따라서 (a)의 두 경우는 정확히 두 근에 해당한다. 매 단계에서 어느 쪽을 골라도 되고, 그 결과는 언제나 $(*)$를 만족한다. ($n = 1$일 때처럼 두 근이 같으면 경우는 하나뿐이다.)

소문항 (ii)(b)

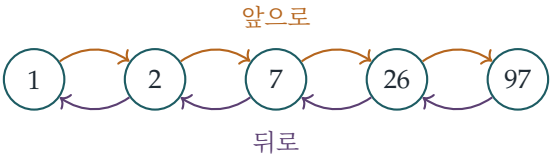
여기서 $v_0 = 1$이므로 조건에 맞고, 연속한 두 항의 쌍 (v_{n-1}, v_n)은 모두 $(1, 2)$ 또는 $(2, 1)$이다. F가 대칭이므로 두 경우 모두

$$v_n^2 + v_{n-1}^2 - 4v_nv_{n-1} = 1 + 4 - 8 = -3,$$

이 되어, 모든 $n \geq 1$에 대하여 $(*)$가 성립한다. (a)의 표현으로 말하면, 이 수열은 언제나 $v_n = v_{n-2}$ 쪽을 택한다.

소문항 (ii)(c)

$v_0 = 1, v_1 = 2$이다. (a)에 의해 그 뒤의 각 항은 두 자리 앞의 항("뒤로 가기")이거나 $4\times$(직전 항) $-$ (그 앞의 항)("앞으로 가기")이다. $(1,2)$에서 앞으로 가면 7, 이어서 26, 97, ...이 나오는데, 이것이 바로 수열 u_n이다. 뒤로 가기는 마지막 앞으로 가기를 되돌린다.



따라서 수열은 1에서 출발하여 매번 이웃한 칸으로 옮겨 가는, 이 사슬 위의 걷기이다. 1의 이웃은 하나뿐이므로, 1을 방문한 직후에는 반드시 2로 가야 한다.

$v_0 = 1$이면서 주기가 4가 되려면 $v_4 = 1$이어야 한다. (b)의 주기 2인 수열은 1과 2 사이를 오갈 뿐이다. 새로운 것을 얻으려면 한 걸음 더 나아간다.

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 4\cdot 2 - 1 = 7, \quad v_3 = v_1 = 2, \quad v_4 = v_2 \text{ 또는 } 4\cdot 2 - 7 = 1.$$

$v_4 = 1$을 고르고 이를 반복하면

$$v_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod 4, \\ 2 & n\text{이 홀수}, \\ 7 & n \equiv 2 \pmod 4, \end{cases} \qquad \text{즉} \quad 1,2,7,2,1,2,7,2,\ldots$$

$(*)$를 직접 확인해 보자. 연속한 두 항의 쌍은 모두 $(1,2)$, $(2,7)$, $(7,2)$, $(2,1)$ 중 하나이다. 대칭성에 의해

$$1+4-8=-3 \quad \text{그리고} \quad 4+49-56=-3,$$

만 확인하면 되고, 둘 다 성립한다. 따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $(*)$가 성립하고, 수열의 주기는 4이다($v_2 \neq v_0$이므로 주기 2는 아니다).

사실 정확히 주기가 4인 답은 이것뿐이다. 1, 2 다음에 걷기는 $v_4 = 1$이 되어야 하므로, v_2에서만 7에 도달할 수 있고 곧바로 되돌아와야 한다.

검산

- $n = 40$까지 u_n을 계산하여 매번 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$임을 확인한다. 예를 들어 $(26,97)$이면 $676 + 9409 - 10088 = -3$이다.
- 첫 번째 항등식을 무작위 정수 세 쌍 수천 개에 대해 검사한다.
- 1, 2로 시작하여 (a)가 허용하는 모든 수열을 v_8까지 나열한다. 처음부터 끝까지 $v_{k+4} = v_k$인 것은 $1,2,1,2,\ldots$와 $1,2,7,2,\ldots$뿐이다.

흔한 실수

- (ii)에서 이유를 밝히지 않고 $F_n - F_{n-1} = 0$이라고 결론짓는 것. 그 이유는 $(*)$에 의해 **모든** F_n이 -3이 되기 때문이다.
- v_1이 하나로 정해진다는 사실을 잊는 것. 이차방정식이 중근 2를 가지므로 경우를 나눌 필요가 없다.
- (c)에서 한 주기 분량의 쌍만 확인하고, "한 바퀴 돌아오는" 쌍 $(v_3, v_4) = (2, 1)$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

양 F_n은 이 점화식의 **불변량**으로, 역학에서의 에너지처럼 보존되는 양이다. 방정식 $x^2 + y^2 - 4xy = -3$은 마르코프(Markov)형(또는 펠(Pell)형) 디오판토스 방정식(Diophantine equation)이다. 이차방정식의 한 근을 다른 근으로 바꾸는 $x \mapsto 4y - x$는 고전적인 "비에트 점핑(Vieta jumping)" 기법으로, 가장 작은 해로부터 모든 정수해를 만들어 낸다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 펠 방정식(Pell's equation)과 점화식을 이용한 그 해법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.